

# ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-RALEIGH, USA.

K. GIRKMANN-WIEN · F. JUNG-WIEN · F. MAGYAR-WIEN

E. MELAN-WIEN · H. MELAN-WIEN · K. WOLF†-WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

F. MAGYAR-WIEN

BAND IV, HEFT 5 (SCHLUSSHEFT)

MIT 56 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 16. NOVEMBER 1950)



WIEN  
SPRINGER-VERLAG  
1950



Das

## Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 — 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)  
Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden.

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in diesen drei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzellen mitzulefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hingewlassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftungen nur in Bleistift ausführen) oder in klaren, verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten 75 Sonderdrucke ihrer Beiträge kostenlos und können weitere Exemplare (maximal 125 Exemplare), falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

### Band IV, Heft 5

### Inhaltsverzeichnis

	Seite
E. Czitary, Ernst Melan zum 60. Geburtstag .....	337
<i>Originalarbeiten.</i>	
E. Bukovics, Eine Verbesserung und Verallgemeinerung des Verfahrens von Blaeß zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen .....	338
H. Craemer, Die Berechnung von Faltwerken durch Iteration. (Mit 6 Textabbildungen.) .....	350
W. Glaser, Richtungs-Doppelfokussierung von Elektronenbahnen in inhomogenen elektrisch-magnetischen Feldern. (Mit 1 Textabbildung.) .....	354
G. Heinrich, Zu L. Föppls Theorie der rollenden Reibung. (Mit 6 Textabbildungen.) .....	363
H. Hochrainer, Eine Modelltheorie für Regelkreise. (Mit 14 Textabbildungen.) .....	376
L. Kirste und F. Müller-Magyari, Steifigkeit und Steifigkeitsmethode bei räumlichen Stabwerken. (Mit 3 Textabbildungen.) .....	387
A. Slibar, Freie und erzwungene nichtlineare Schwingungen von Mehrmassensystemen. (Mit 8 Textabbildungen.) .....	398
E. Skudrzyk, Die Anwendung des Ultraschalles bei der Materialprüfung. (Mit 17 Textabbildungen.) .....	408
<i>Buchbesprechungen</i> .....	425

Benz, F., Einführung in die Funktechnik, 4. Aufl. (H. König). — Beiträge zur angewandten Mechanik (Federhofer-Girkmann-Festschrift) (E. Czitary). — Glocker, R., Materialprüfung mit Röntgenstrahlen, 3. Aufl. (F. Regler). — Jäger, K., Festigkeitsnachweis im Stahlbetonbau (A. Leon). — Juhos, B., Die Erkenntnis und ihre Leistung (F. Magyar). — Prey, A., Einführung in die sphärische Astronomie (K. Mader). — Riediger, B., Brennstoffe, Kraftstoffe, Schmierstoffe (A. Philippovich). — Rusterholz, A. A., Elektronenoptik, Band 1 (W. Glaser). — Schaffernak, F., Grundriß der Flußmorphologie und des Flußbaues (A. Grzywiński). — Schiffmann, T., Einführung in Wasserbau und Grundbau (A. Grzywiński). — Steed, R. W., An Introduction to Distribution Methods of Structural Analysis (H. Parkus). — Walcher, Th., Das Trockengleichrichter-Vielfachmeßgerät (F. Regler).



## Ernst Melan zum 60. Geburtstag

Am 16. November l. J. wird Ernst Melan 60 Jahre alt; dies möge Anlaß zu einer Würdigung des um die Entwicklung der modernen Baustatik so verdienten Gelehrten sein. Ernst Melan wurde 1890 in Brünn als Sohn des berühmten Brückenbauers Joseph Melan geboren, der zu jener Zeit an der Deutschen Technischen Hochschule lehrte. Seine Jugend verbrachte Prof. Melan in Prag, wohin sein Vater inzwischen berufen worden war. Nach Absolvierung des Deutschen Gymnasiums bezog er 1908 die Prager Deutsche Technische Hochschule, legte dort die zweite Staatsprüfung aus dem Bauingenieurfache ab und erlangte daselbst 1917 auch den Titel eines Doktors der technischen Wissenschaften.

Nach Beendigung seiner Studien war Prof. Melan zunächst von 1916 bis 1918 bei der steiermärkischen Landesregierung in Graz tätig. Hernach trat er in die Dienste der Brückenbauanstalt Waagner-Biró A.G. in Wien, verließ aber bald diese Stel-



Technischen Hochschule habilitiert. Aber schon im Jahre 1925 erhielt Ernst Melan eine Berufung als o. Professor für Baustatik und Statik des Hochbaues an diese Hochschule, welcher er nunmehr 25 Jahre angehört.

Professor Melan hat namentlich während dieser Zeit eine überaus fruchtbringende wissenschaftliche und praktische Tätigkeit entfaltet.

Seine praktischen Arbeiten umfassen alle Zweige des Stahlhochbaues, namentlich aber des Industriebaues, sowie des Ingenieurholzbaues, um dessen Weiterentwicklung er sich große Verdienste erworben hat. Seine Arbeiten auf diesen Gebieten sind hauptsächlich konstruktiver Art, daneben aber auch gutachtlich.

Auf wissenschaftlichem Gebiet hat sich Prof. Melan vornehmlich mit Fragen der Elastizitätstheorie und der Baustatik beschäftigt. Besonders verdient hat er sich dabei um die Einführung moderner Methoden zur Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme gemacht. Seine bisherigen wissenschaftlichen Arbeiten sind in rund 40 Zeitschriftenaufsätzen und sechs Büchern niedergelegt. Von letzteren müssen besonders das gemeinsam mit Friedrich Bleich verfaßte und 1927 erschienene Buch „Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik“,

lung wieder, um eine solche als Betriebsingenieur im Festigkeitslaboratorium der Technischen Hochschule in Berlin-Charlottenburg anzunehmen. 1921 kehrte Ernst Melan wieder zur Waagner-Biró A. G. in Wien als Oberingenieur zurück und verblieb hier bis zu seiner 1923 erfolgten Berufung als a. o. Professor für Baustatik und Festigkeitslehre an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag. Im Jahre zuvor hatte er sich als Privatdozent an der Wiener



dann das 1942 zusammen mit Robert Schindler verfaßte Werk „Die genaue Berechnung von Trägerrosten“ sowie seine kürzlich beim Wiener Springer-Verlag erschienene „Einführung in die Baustatik“ hervorgehoben werden. Letzteres bildet den Abschluß der vor einigen Jahren zusammen mit Fritz Chmelka herausgegebenen Einführungen in die Statik und in die Festigkeitslehre.

Die ersprießliche wissenschaftliche Tätigkeit fand ihre Anerkennung durch seine 1943 erfolgte Wahl zum korrespondierenden Mitglied der Deutschen Akademie der Wissenschaften in Prag und die 1945 erfolgte Wahl zum wirklichen Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Wien.

An der Wiener Technischen Hochschule, wo Prof. Ernst Melan zu den beliebtesten Lehrern zählt, bekleidete er in den Studienjahren 1946/47 und 1947/48 das Amt des Dekans der Fakultät für Bauingenieurwesen. Er ist ferner Vorstandsmitglied des Österreichischen Normenausschusses.

Die Feier seines Geburtstages sei mit dem Wunsche verbunden, daß es ihm vergönnt sei, uns auch weiterhin mit so bedeutsamen Arbeiten wie bisher zu beschenken.

*E. Czitary, Wien.*

## **Eine Verbesserung und Verallgemeinerung des Verfahrens von Blaeß zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen<sup>1\*</sup>.**

Von E. Bukovics, Wien.

**Zusammenfassung.** Für das Verfahren von Blaeß zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. Ordnung wird durch einen erweiterten Verbesserungsansatz die Genauigkeit vergrößert. Weiters werden allgemeine Formelsätze für die direkte Anwendung des Verfahrens auf Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung entwickelt. Für Differentialgleichungen 3. und 4. Ordnung werden spezielle Formeln angegeben. Bei diesem Verfahren wird eine mit der Ordnung der Differentialgleichung ansteigende Genauigkeit erreicht.

**Summary.** For the method of Blaeß for numerical integration of ordinary differential equations of the order 2, the accuracy is increased by an extended formula for correction. Furthermore, general formulas are developed for the direct use of this method of differential equations of the order  $n$ , especially for the orders 3 and 4. With this method the accuracy increases with the order of the differential equation.

**Résumé.** Pour la méthode de Blaeß quant à l'intégration numérique des équations différentielles de l'ordre 2 l'exactitude devient plus exacte par une formule plus étendue pour la correction. En outre des formules générales sont développées pour l'emploi directe de la méthode mentionnée ci-dessus des équations différentielles de l'ordre  $n$  spécialement pour l'ordre 3 et 4. Cette méthode fait croître l'exactitude avec l'ordre de l'équation différentielle.

### **I. Einleitung.**

Blaeß<sup>2</sup> hat ein direktes Verfahren zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen, insbesondere 2. Ordnung angegeben. Dieses Verfahren beruht auf dem Prinzip der Annäherung durch Potenzreihen. Zurmühl hat in seiner Dissertation<sup>3</sup> die Genauigkeitsverhältnisse bei diesem Verfahren für Differentialgleichungen 2. Ordnung untersucht. Darnach wird die wahre Taylor-

\* Herrn Prof. Dr. E. Melan zum 60. Geburtstag gewidmet.

<sup>1</sup> Diese Arbeit ist eine gekürzte Darstellung der Wiener Dissertation Nr. 16582 vom 13. Mai 1948.

<sup>2</sup> Blaeß: Zur angenäherten Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. *Z. Ver. dtsch. Ing.* 81, 587—596 (1937).

<sup>3</sup> Zurmühl: Zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung. *Z. angew. Math. Mechan.* 20, 104—116 (1940).



Entwicklung der gesuchten Lösung bis zu Gliedern von der Ordnung  $h^3$  genau abgeglichen. Das Verfahren ist einfach anwendbar, hat aber gegenüber dem Runge-Kutta-Verfahren den Nachteil, daß bei diesem Verfahren ein Abgleich bis zu Gliedern von der Ordnung  $h^4$  erfolgt<sup>4</sup>.

In dieser Arbeit soll nun gezeigt werden:

1. Durch eine einfache Zusatzformel kann die Genauigkeit des Blaeß-Verfahrens so gesteigert werden, daß auch Taylor-Glieder 4. Ordnung genau abgeglichen werden.

2. Das Verfahren kann auf Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung so verallgemeinert werden, daß (unter Berücksichtigung des in dieser Arbeit entwickelten erweiterten Verbesserungssatzes) die wahren Taylor-Entwicklungen der Lösung bis zur Ordnung  $h^{n+2}$  genau abgeglichen werden (es wird also die gleiche Genauigkeit erreicht wie bei der von Zurmühl<sup>4</sup> durchgeführten Verallgemeinerung des Runge-Kutta-Verfahrens). Die Genauigkeit des Verfahrens steigt also mit der Ordnung der Differentialgleichung an, was als wesentlicher Vorteil gegenüber den indirekten Methoden durch Aufspalten in Differentialgleichungssysteme angesehen werden kann (man vgl. darüber Anm. 4).

## II. Das verbesserte Blaeß-Verfahren für Differentialgleichungen 2. Ordnung:

### 1. Die Arbeiten von Blaeß und Zurmühl<sup>2,3</sup>.

Es sei eine Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1)$$

vorgelegt<sup>5</sup>. Die Lösung dieser Differentialgleichung

$$y_1 = y_1(x),$$

die den Anfangsbedingungen

$$x = x_0; \quad y = y_0, \quad y' = y'_0$$

genüge, soll an der Stelle  $x = x_0 + k$  durch eine Taylor-Entwicklung

$$y_1 = y_0 + y'_0 k + y''_0 \frac{k^2}{2!} + y'''_0 \frac{k^3}{3!} + y^{IV}_0 \frac{k^4}{4!} + \dots$$

dargestellt werden. Dabei sind  $y_0, y'_0$  vorgegeben und  $y''_0$  kann aus der Differentialgleichung (1) ermittelt werden. Die weiteren Ableitungen sollen nicht direkt berechnet werden, da die Differentiation von (1) im allgemeinen sehr komplizierte Ausdrücke ergibt. Es werden vielmehr nach Blaeß zunächst schrittweise an den Stellen  $x_0 + h, x_0 + 2h, \dots$  „Grobwerte“  $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots; \tilde{y}'_1, \tilde{y}'_2, \dots$  berechnet, die nur die Glieder mit  $y, y', y''$  der Taylor-Reihe berücksichtigen. Eine weitere Einbeziehung von Taylor-Gliedern erfolgt dann durch gesonderte Korrekturen  $V$  und  $V'$  nach fünf Schritten. Die so verbesserten Werte bilden den Ausgangspunkt für die weitere Rechnung.

Die Berechnung der „Grobwerte“  $\tilde{y}_1, \dots; \tilde{y}'_1, \dots$  erfolgt unter Verwendung der Abkürzungen

$$y'(x_i) = v_i, \\ f(x_i, y_i, v_i) \frac{h^2}{2} = \alpha_i$$

nach folgendem Schema:

<sup>4</sup> Zurmühl: Runge-Kutta-Verfahren zur numerischen Integration von Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung. Z. angew. Math. Mech. 28, 173—182 (1948).

<sup>5</sup> Es soll hier und später bei den Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung vorausgesetzt werden, daß die Lösung in dem in Betracht kommenden Bereiche in eine Potenzreihe entwickelbar sei.



Tabelle 1. Schema nach Blaeß für Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Nr.	$x_i$	$y_i$	$v_i h$	$\alpha_i$
0	$x_0$	$y_0$	$v_0 h$	$\alpha_0 = f(x_0, y_0, v_0) \frac{h^2}{2!}$
1	$x_0 + h$	$\tilde{y}_1 = y_0 + v_0 h + \alpha_0$	$\tilde{v}_1 h = v_0 h + 2 \alpha_0$	$\alpha_1 = f(x_0 + h, \tilde{y}_1, \tilde{v}_1) \frac{h^2}{2!}$
2	$x_0 + 2h$	$\tilde{y}_2 = \tilde{y}_1 + \tilde{v}_1 h + \alpha_1$	$\tilde{v}_2 h = \tilde{v}_1 h + 2 \alpha_1$	$\alpha_2 = f(x_0 + 2h, \tilde{y}_2, \tilde{v}_2) \frac{h^2}{2!}$
3	$x_0 + 3h$	$\tilde{y}_3 = \tilde{y}_2 + \tilde{v}_2 h + \alpha_2$	$\tilde{v}_3 h = \tilde{v}_2 h + 2 \alpha_2$	$\alpha_3 = f(x_0 + 3h, \tilde{y}_3, \tilde{v}_3) \frac{h^2}{2!}$
4	$x_0 + 4h$	$\tilde{y}_4 = \tilde{y}_3 + \tilde{v}_3 h + \alpha_3$	$\tilde{v}_4 h = \tilde{v}_3 h + 2 \alpha_3$	$\alpha_4 = f(x_0 + 4h, \tilde{y}_4, \tilde{v}_4) \frac{h^2}{2!}$
5	$x_0 + 5h$	$\tilde{y}_5 = \tilde{y}_4 + \tilde{v}_4 h + \alpha_4$	$\tilde{v}_5 h = \tilde{v}_4 h + 2 \alpha_4$	$\alpha_5 = f(x_0 + 5h, \tilde{y}_5, \tilde{v}_5) \frac{h^2}{2!}$
5	$x_0 + 5h$	$V$ $y_5 = \tilde{y}_5 + V$	$V'$ $v_5 h = \tilde{v}_5 h + V'$	

(2)

Zur Ermittlung von  $V$  und  $V'$  werden Linearkombinationen der  $\alpha_0 \dots \alpha_5$  herangezogen.

Für den Ansatz

$$V = \sum_{i=0}^5 A_i \alpha_i, \quad V' = \sum_{i=0}^5 B_i \alpha_i \quad (3)$$

erhält man:

$$V = \frac{45 \alpha_4 + 100 \alpha_1 - 145 \alpha_0}{24}, \quad V' = \frac{11 \alpha_5 + 5 \alpha_1 - 16 \alpha_0}{12} \quad (3a)$$

Durch diese Verbesserungen wird die wahre Taylor-Entwicklung für  $y_5$  bzw.  $v_5 h$  (sie sollen mit  $\bar{y}_5$  bzw.  $\bar{v}_5 h$  bezeichnet werden) im Abstand  $5h$  bezüglich  $x_0$  bis zu Gliedern 3. Ordnung genau abgeglichen. Eine weitere Steigerung der Genauigkeit kann durch den Ansatz (3) nicht erreicht werden. Dies erkennt man folgendermaßen:

Die wahren Taylor-Entwicklungen lauten:

$$\begin{aligned} \bar{y}_5 &= y_0 + 5 v_0 h + 25 \alpha_0 + 125 y_0''' \frac{h^3}{3!} + 625 y_0^{IV} \frac{h^4}{4!} + \dots, \\ \bar{v}_5 h &= v_0 h + 2 \cdot 5 \alpha_0 + 3 \cdot 25 y_0''' \frac{h^3}{3!} + 4 \cdot 125 y_0^{IV} \frac{h^4}{4!} + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Aus dem Schema (2) kann man  $\tilde{y}_5$  und  $\tilde{v}_5 h$  durch rekursives Einsetzen durch  $y_0$ ,  $v_0 h$  und  $\alpha_0 \dots \alpha_5$  in folgender Weise darstellen:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_5 &= y_0 + 5 v_0 h + 9 \alpha_0 + 7 \alpha_1 + 5 \alpha_2 + 3 \alpha_3 + \alpha_4, \\ \tilde{v}_5 h &= v_0 h + 2 (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4). \end{aligned} \quad (5)$$

Der Fehler des Verfahrens ist dann

$$\bar{y}_5 - \tilde{y}_5 \quad \text{bzw.} \quad \bar{v}_5 h - \tilde{v}_5 h.$$

Dieser Fehler soll durch Ansatz (3) möglichst genau abgeglichen werden.

Zunächst errechnet man in (4) die Ableitungen  $y_0'''$ ,  $y_0^{IV}$ , .... Unter Verwendung der von Zurmühl<sup>3</sup> vorgeschlagenen Abkürzungen<sup>6</sup>:

$$\left. \begin{aligned} D^K f &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + f \frac{\partial}{\partial v} \right]^K f \\ D^2_I f &= D^2 f + f f_y \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

<sup>6</sup> Im folgenden soll  $f$ , wenn kein Index dabei steht, immer für  $x = x_0$  genommen werden.



erhält man:

$$\begin{aligned}\bar{y}_5 &= y_0 + 5 v_0 h + 25 f \frac{h^2}{2!} + 125 Df \frac{h^3}{3!} + 625 (D^2_1 f + f_v Df) \frac{h^4}{4!} + \dots \\ \bar{v}_5 h &= v_0 h + 2 \cdot 5 f \frac{h^2}{2!} + 3 \cdot 25 Df \frac{h^3}{3!} + 4 \cdot 125 (D^2_1 f + f_v Df) \frac{h^4}{4!} + \dots\end{aligned}\quad (7)$$

Um diese Ausdrücke mit (5) vergleichen zu können, muß man die Taylor-Entwicklungen für die  $\alpha_i = f_i \frac{h^2}{2!}$  kennen. Die Rechnung ergibt:

$$\left. \begin{aligned}f_1 &= f + Df h + D^2_1 f \frac{h^2}{2!} + \dots \\ f_2 &= f + 2 Df h + (4 D^2_1 f + 2 f_v Df) \frac{h^2}{2!} + \dots \\ f_3 &= f + 3 Df h + (9 D^2_1 f + 6 f_v Df) \frac{h^2}{2!} + \dots \\ f_4 &= f + 4 Df h + (16 D^2_1 f + 12 f_v Df) \frac{h^2}{2!} + \dots \\ f_5 &= f + 5 Df h + (25 D^2_1 f + 20 f_v Df) \frac{h^2}{2!} + \dots\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Daraus bestimmt man die  $\alpha_i$  und erhält durch Einsetzen in (5):

$$\left. \begin{aligned}\tilde{y}_5 &= y_0 + 5 v_0 h + 25 \alpha_0 + 90 Df \frac{h^3}{3!} + (420 D^2_1 f + 240 f_v Df) \frac{h^4}{4!} + \dots \\ \tilde{v}_5 h &= v_0 h + 2 \cdot 5 \alpha_0 + 60 Df \frac{h^3}{3!} + (360 D^2_1 f + 240 f_v Df) \frac{h^4}{4!} + \dots\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Aus (7) und (9) erhält man den „Fehler“:

$$\left. \begin{aligned}\bar{y}_5 - \tilde{y}_5 &= 35 Df \frac{h^3}{3!} + (205 D^2_1 f + 385 f_v Df) \frac{h^4}{4!} + \dots \\ \bar{v}_5 h - \tilde{v}_5 h &= 15 Df \frac{h^3}{3!} + (140 D^2_1 f + 260 f_v Df) \frac{h^4}{4!} + \dots\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Diese „Fehler“ sind durch die Verbesserungen  $V$  und  $V'$  — soweit möglich — abzugleichen. Durch Einsetzen der Taylor-Entwicklungen (8) in (3) erhält man die Taylor-Entwicklungen für  $V$  und  $V'$ . Koeffizientenvergleich mit (10) ergibt die linearen Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{rcll} \text{für } V: & A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = & 0 & 1 \\ & 3 A_1 + 6 A_2 + 9 A_3 + 12 A_4 + 15 A_5 = & 35 & 2 \\ \hline & 6 A_1 + 24 A_2 + 56 A_3 + 96 A_4 + 150 A_5 = & 205 & 3 \\ & 12 A_2 + 36 A_3 + 72 A_4 + 120 A_5 = & 385 & 4 \end{array} \quad (11)$$

und ein analoges Gleichungssystem (11a) für  $B_0 \dots B_5$ . (Die linken Seiten sind nur durch  $B_0 \dots B_5$  zu ersetzen. Auf den rechten Seiten sind andere Zahlkoeffizienten, und zwar 0, 15, 140, 260.)

Beide Gleichungssysteme sind unlösbar, da der Rang der erweiterten Matrix nicht gleich dem Range der Gleichungsmatrix ist. Multipliziert man nämlich die zweite Gleichung mit 2 und zieht sie von der dritten ab, so erhält man eine Gleichung, die der vierten widerspricht. Es ist also nur ein Abgleich der Glieder bis zur 3. Ordnung möglich. Die Verbesserungsformeln (3a) sind so bestimmt, daß sie die Gleichungen 1, 2 und 3 der Systeme (11) und (11a) befriedigen und darüber hinaus die ersten Ausdrücke der Glieder 5. und 6. Ordnung möglichst genau abgleichen.



## 2. Herleitung einer Verbesserungsformel.

Mit dem Ansatz (3) kann eine weitere Abgleichung der Fehler (10) nicht erreicht werden. Die Ursache liegt in den Gleichungen 4 der Gleichungssysteme (11) und (11a). Diese Gleichungen entstehen durch Koeffizientenvergleich für die Glieder  $f_v D f \frac{h^4}{4!}$ , wobei  $f_v$  für  $x = x_0$  genommen ist. Es ist naheliegend, durch eine Erweiterung des Ansatzes (3):

$$V^* = \sum_{i=0}^5 (A_i + a_i f_v h) \alpha_i \quad V'^* = \sum_{i=0}^5 (B_i + b_i f_v h) \alpha_i \quad (12)$$

zu versuchen, einen weiteren Abgleich zu erreichen.

Setzt man in (12) die Taylor-Entwicklungen (9) ein und führt wie oben Koeffizientenvergleich durch, so erhält man anstatt der Systeme (11) und (11a) folgende:

$$\left. \begin{array}{rcl} A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 & = & 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 & = & 0 \\ 3A_1 + 6A_2 + 9A_3 + 12A_4 + 15A_5 & = & 35 \\ 6A_1 + 24A_2 + 54A_3 + 96A_4 + 150A_5 & = & 205 \\ 12A_2 + 36A_3 + 72A_4 + 120A_5 + 12a_1 + 24a_2 + 36a_3 + 48a_4 + 60a_5 & = & 385 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ 1a \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \quad (13)$$

und ein analoges Gleichungssystem (13a) für  $B_0, \dots, B_5, b_0, \dots, b_5$ . [Es sind bei den linken Seiten von (13) die  $A_0, \dots, A_5, a_0, \dots, a_5$  durch  $B_0, \dots, B_5, b_0, \dots, b_5$  zu ersetzen. Die Koeffizienten der rechten Seiten sind durch 0, 0, 15, 140, 260 zu ersetzen.]

Diese Gleichungssysteme sind nun lösbar. Man kann etwa die  $A_i$  und  $B_i$  so bestimmen, daß die Blaeßschen Verbesserungen (3a) erhalten bleiben und dann die  $a_i$  und  $b_i$  so, daß die Gleichungen (1a) und (4) von (13), bzw. (13a) erfüllt werden.

Ersetzt man die Blaeßschen Verbesserungen (3a) durch

$$\left. \begin{array}{l} V^* = V + \frac{100 f_v h}{24} (\alpha_4 + \alpha_1 - 2 \alpha_0) = V + K \\ V'^* = V' + \frac{25 f_v h}{12} (\alpha_5 + \alpha_1 - 2 \alpha_0) = V' + K' \end{array} \right\} \quad (14)$$

(wobei  $f_v$ , die partielle Ableitung von  $f$  nach  $v$ , für  $x = x_0$  zu nehmen ist!), so wird die erstrebte Abgleichung bis zu Gliedern der Ordnung  $h^4$  erreicht.

Zusätzlich muß lediglich  $f_v$  an der Stelle  $x = x_0$  berechnet werden, was im allgemeinen keine wesentlichen Schwierigkeiten bieten wird.

Folgendes Zahlenbeispiel für eine Differentialgleichung 2. Ordnung zeigt die Güte der erreichten Annäherung mit dem Blaeßschen Ansatz (3) allein und mit dem erweiterten Ansatz (12).

Beispiel: Für die Differentialgleichung

$$y'' = -3y' - 2y + 4x$$

seien die Anfangsbedingungen  $x_0 = y_0 = 0, v_0 = -1$  gegeben. Gesucht seien die Werte für  $y$  und  $v h$  für  $x = 0.1$ . Die exakte Lösung für die Anfangsbedingungen ist  $y = 3e^{-x} + 2x - 3$ . Der Gang der Rechnung ist aus Tabelle 2 ersichtlich.

Der Fehler beträgt also für  $y_i$  bei Verwendung der Verbesserungsformel (3a):  $+14.25$ , bei Verwendung der neuen Formel (14):  $-0.67$  (Einheiten der 6. Dezimale). Entsprechend bei  $v_i h$ :  $+8.32$ , bzw.  $-0.54$ .

Man könnte nun versuchen, eine weitere bessere Abgleichung von Taylor-Gliedern durch eine erneute Erweiterung des Ansatzes (3) zu erreichen. Der Ansatz würde



dann aber so kompliziert sein, daß sich kein Vorteil mehr gegenüber der direkten Berechnung weiterer Taylor-Glieder durch vollständiges Differenzieren der gegebenen Differentialgleichung bieten würde.

Tabelle 2. Rechengang nach dem Verfahren von Blaeß für die Differentialgleichung  $y'' = -3y' - 2y + 4x$ .

Nr.	$x_i$	$y_i$	$v_i h$	$\alpha_i$
0	0.00	0.00000000	-0.02000000	0.00060000
1	0.02	-0.01940000	-0.01880000	0.00058776
2	0.04	-0.03761224	-0.01762448	0.00057578
3	0.06	-0.05466094	-0.01647292	0.00056405
4	0.08	-0.07056981	-0.01534482	0.00055257
5	0.10	-0.08536206	-0.01423968	0.00054133
	+ V	-139.93	-58.88	
		-0.08550199	-0.01429856	Blaeß-Verbesserung
	+ K	+14.92	+8.86	
	0.10	-0.08548707	-0.01428970	Zusatzverbesserung
	0.10	-0.08548774	-0.01429024	Exakter Wert

### III. Verallgemeinertes Blaeß-Verfahren für Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung.

Das Verfahren von Blaeß kann auf Differentialgleichungen beliebiger Ordnung verallgemeinert werden. Legt man nämlich den Untersuchungen eine Differentialgleichung<sup>5</sup>

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

zugrunde, so zeigt es sich, daß bei entsprechender Definition von  $D^2_1 f$  und bei Ersetzen von  $f_v D f$  durch  $f_y^{(n-1)} D f$  die Taylor-Entwicklungen (8) für  $f_1, f_2, \dots$  allgemein gelten.

Im folgenden soll nun eine Aufstellung des allgemeinen Blaeßschen Schemas und die Ermittlung der Verbesserungswerte erläutert werden. Dabei soll zunächst die Wahl der Schrittzahl  $K$ , nach der die Verbesserung eingeschaltet wird, offen gelassen werden. Ziel der Entwicklung wird sein, die Gleichungssysteme (13) für die Verbesserungswerte in allgemeiner Form zu erhalten, so daß man für Differentialgleichungen bestimmter Ordnung daraus die Verbesserungswerte ermitteln kann.

#### 1. Das allgemeine Blaeßsche Schema.

Für die Differentialgleichung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (15)$$

seien die Anfangsbedingungen

$$x = x_0, y = y_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

vorgegeben. Es sollen die entsprechenden Werte für  $x = x_1$  mit möglichst großer Genauigkeit berechnet werden.

Man geht zunächst ganz analog wie in Abschnitt II bei Differentialgleichungen 2. Ordnung vor und berechnet „Grobwerte“ für  $y, y' h, \dots, y^{(n-1)} \frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!}$  von  $x = x_0$  ausgehend in äquidistanten Abständen  $x_0 + h, \dots, x_0 + K h$  (also in  $K$  Schritten). Dabei geht man von den Anfangswerten  $x_0, y_0 h, \dots, y_0^{(n-1)} \frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!}$  aus und berechnet  $f_0 \frac{h^n}{n!} = f(x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \frac{h^n}{n!}$ . Diese Werte trägt man in die erste Zeile



eines Schemas<sup>7</sup> ein. Dann ermittelt man die zweite Zeile des Schemas, indem man die Werte der Vorzeile in die entsprechende Taylor-Entwicklung einsetzt. Man gewinnt die ersten Grobwerte

$$\tilde{y}_1, \tilde{y}_1' h, \dots, \tilde{y}_1^{(n-1)} \frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!}$$

und durch Einsetzen in (15)

$$f_1 \frac{h^n}{n!} = f(x_1, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_1^{(n-1)}) \frac{h^n}{n!}.$$

Das wird fortgesetzt. Allgemein errechnet man die Werte der  $i$ -ten Zeile aus den Werten der Zeile  $(i-1)$ . Diese  $i$ -te Zeile baut sich in folgender Weise auf: (dabei werden folgende Abkürzungen verwendet:

$$v_i^j = y_i^{(j)} \frac{h^j}{j!} \quad M_i = f(x_i, \tilde{y}_i, \dots, \tilde{y}_i^{(n-1)}) \frac{h^n}{n!},$$

wobei  $v_i^0 = \tilde{y}_i$  sein soll):

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}_i^j &= \tilde{v}_{i-1}^j + \binom{j+1}{j} \tilde{v}_{i-1}^{j+1} + \dots + \binom{k}{j} \tilde{v}_{i-1}^k + \dots + \binom{n-1}{j} \tilde{v}_{i-1}^{n-1} + \binom{n}{j} M_{i-1} \\ j &= 0, 1, \dots, n-1 \\ M_i &= f_i(x_i, \tilde{y}_i, \dots, \tilde{y}_i^{(n-1)}) \frac{h^n}{n!} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Das Schema wird dann bis zur  $K$ -ten Zeile fortgesetzt, wodurch man die Grobwerte  $\tilde{y}_K^j$  ( $j = 0, 1, \dots, n-1$ ) erhält. Zu diesen Grobwerten werden dann die im nächsten Kapitel zu bestimmenden Verbesserungen  $V_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n-1$ ) dazugeschlagen, wodurch man die Ausgangswerte  $v_K^j$  für die weitere Rechnung erhält:

$$v_K^j = \tilde{v}_K^j + V_j \quad (j = 0, 1, \dots, n-1) \quad (18)$$

Für die Aufstellung des Schemas selbst wird man oft — wie im Kapitel 3 dieses Abschnittes an Hand der Differentialgleichungen 3. und 4. Ordnung gezeigt werden wird — Vereinfachungen finden können, die Arbeit bei der Multiplikation ersparen.

## 2. Die Ermittlung der Verbesserungen.

Die Verbesserungen  $V_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n-1$ ) sollen durch den Ansatz<sup>8</sup>

$$V_j = \sum_{i=0}^K (A_i^j + f_y^{(n-1)} h B_i^j) \cdot M_i \quad (j = 0, 1, \dots, n-1) \quad (19)$$

so bestimmt werden, daß der Fehler des Verfahrens

$$\bar{v}_K^j - \tilde{v}_K^j \quad ^9$$

möglichst gering ist. Dazu müssen zunächst die Taylor-Entwicklungen für  $\bar{v}_K^j$  und  $\tilde{v}_K^j$  ermittelt werden.

<sup>7</sup> Dieses Schema baut sich genau so wie das Schema (2) auf, nur besteht es aus  $(n+3)$  Spalten für Nr.,  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $y_i' h$ , ...,  $y_i^{(n-1)} \frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!}$ ,  $f_i \frac{h^n}{n!}$ .

<sup>8</sup>  $f_y^{(n-1)}$  ist für  $x = x_0$  zu nehmen.

<sup>9</sup>  $\bar{v}_K^j$  soll die wahre Taylor-Entwicklung bedeuten.



Durch vollständige Induktion läßt sich zeigen, daß die  $\tilde{v}_K^i$  in folgender Weise durch  $v_0^0, \dots, v_0^{n-1}; M_0, \dots, M_{K-1}$  dargestellt werden können:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_K^j = & v_0^j + \binom{j+1}{j} K v_0^{j+1} + \dots + \binom{n-1}{j} K^{n-j-1} v_0^{n-1} + \\ & + \binom{n}{j} \{ [K^{n-j} - (K-1)^{n-j}] M_0 + [(K-1)^{n-j} - (K-2)^{n-j}] M_1 + \dots \\ & \dots + [2^{n-j} - 1^{n-j}] M_{K-2} + M_{K-1} \}. \end{aligned} \quad (20)$$

Die Taylor-Entwicklungen für die  $M_i = f_i \frac{h^n}{n!}$  erhält man aus den  $f_i$ , für die — wie man ebenfalls durch vollständige Induktion zeigen kann — bei entsprechender Verallgemeinerung der Abkürzungen (6):

$$\left. \begin{aligned} D^K f &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + \dots + y^{(n-1)} \frac{\partial}{\partial y^{(n-2)}} + f \frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}} \right]^K f \\ D_1^2 f &= D^2 f + f_y y'' + \dots + f_y^{(n-2)} f \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

folgende Formel gilt<sup>10</sup>:

$$\boxed{f_i = f_0 + i \cdot Df \cdot h + [i^2 D_1^2 f + i(i-1) f_y^{(n-1)} Df] \frac{h^2}{2} + \dots} \quad (22)$$

$i = 0, 1, \dots, K$

Berechnet man daraus die  $M_i$  und setzt in (20) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_K^j = & v_0^j + \binom{j+1}{j} K v_0^{j+1} + \dots + \binom{n-1}{j} K^{n-j-1} v_0^{n-1} + \binom{n}{j} K^{n-j} M_0 + \\ & + \binom{n}{j} \binom{n+1}{1} \sum_{i=1}^{K-1} (K-i)^{n-j} Df \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} + \\ & + \binom{n}{j} \binom{n+1}{2} \left[ \sum_{i=1}^{K-1} (K-i)^{n-j} (2i-1) D_1^2 f + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{i=2}^{K-1} (K-i)^{n-j} (i-1) f_y^{(n-1)} Df \right] \frac{h^{n+2}}{(n+2)!} + \dots \\ & j = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (23)$$

Für die wahren Taylor-Entwicklungen  $\bar{v}_K^j = \bar{y}_K^{(j)} \frac{h^j}{j!}$  erhält man unter Verwendung der Abkürzungen (16), (21):

$$\begin{aligned} \bar{v}_K^j = & v_0^j + \binom{j+1}{j} K v_0^{j+1} + \dots + \binom{n-1}{j} K^{n-j-1} v_0^{n-1} + \binom{n}{j} K^{n-j} M_0 + \\ & + \binom{n+1}{j} K^{n-j+1} Df \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} + \\ & + \binom{n+2}{j} K^{n-j+2} (D_1^2 f + f_y^{(n-1)} Df) \frac{h^{n+2}}{(n+2)!} + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Der Fehler  $\bar{v}_K^j - \tilde{v}_K^j$ , der sich durch Subtraktion von (23) von (24) ergibt, soll nun durch den Ansatz (19) abgeglichen werden. Für die Koeffizienten  $A_i^j$  und  $B_i^j$  ergeben sich durch Koeffizientenvergleich zwischen  $\bar{v}_K^j - \tilde{v}_K^j$  und der durch Einsetzen von (22) in (19) gewonnenen Taylor-Entwicklung folgende Gleichungssysteme:

<sup>10</sup> Für  $i = 0, 1, \dots, 5$  erhält man die Formeln (13), die also allgemeingültig sind.



$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^K A_i^j &= 0 \\ \sum_{i=0}^K B_i^j &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25a)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^K i A_i^j &= \frac{n! 1!}{j! (n-j+1)!} K^{n-j+1} - \binom{n}{j} \sum_{i=1}^{K-1} (K-i)^{n-j} \\ \sum_{i=1}^K i^2 A_i^j &= \frac{n! 2!}{j! (n-j+2)!} K^{n-j+2} - \binom{n}{j} \sum_{i=1}^{K-1} (K-i)^{n-j} (2i-1) \\ \sum_{i=2}^K i(i-1) A_i^j + 2 \sum_{i=1}^K i B_i^j &= \frac{n! 2!}{j! (n-j+2)!} K^{n-j+2} - \\ &\quad - 2 \binom{n}{j} \sum_{i=2}^{K-1} (K-i)^{n-j} (i-1) \end{aligned} \right\} \quad (25b)$$

$$j = 0, 1, \dots, n-1$$

Erfüllen die  $A_i^j$ ,  $B_i^j$  die drei Gl. (25a), so wird eine Genauigkeit bis zur Ordnung  $h^{n+1}$  erreicht; erfüllen sie auch noch die zwei Gl. (25b), so geht die Genauigkeit bis zur Ordnung  $h^{n+2}$ . Die Gleichungssysteme sind lösbar. Aber eine größere Genauigkeit ist durch Ansatz (19) nicht erreichbar. Dies erkennt man, wenn man noch die Gleichungen für den Abgleich der Glieder  $h^{n+3}$  aufstellt. Dann sind die Gleichungssysteme nicht mehr lösbar.

Soll nun das Verfahren für Differentialgleichungen einer bestimmten Ordnung entwickelt werden, dann stellt man zuerst das Rechenschema für die Grobwerte auf. Aus den Gleichungssystemen (25) werden dann die Formeln für die Verbesserungen ermittelt.

Es bedeuten:  $n$  Ordnung der Differentialgleichung;  $K$  Schrittzahl, nach der die Verbesserung eingeschaltet wird;  $j$  Ordnung des Differentialquotienten, für den die Verbesserung errechnet werden soll.

Man ermittelt zunächst die rechten Seiten der Gleichungssysteme, und zwar bleiben  $n$ ,  $K$  für die ganze Rechnung fest (im ganzen muß man  $n$  Gleichungssysteme berechnen) ( $j = 0, 1, \dots, n-1$ ). Dann ermittelt man die Lösungen  $A_i^j$  für die Gleichungen 3, 4, die auch noch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^K i^3 A_i^j &= \frac{n! 3!}{j! (n-j+3)!} K^{n-j+3} - \binom{n}{j} \sum_{i=1}^{K-1} (K-i)^{n-j} [i^3 - (i-1)^3] \\ \sum_{i=1}^K i^4 A_i^j &= \frac{n! 4!}{j! (n-j+4)!} K^{n-j+4} - \binom{n}{j} \sum_{i=1}^{K-1} (K-i)^{n-j} [i^4 - (i-1)^4] \end{aligned} \right\} \quad (25c)$$

möglichst genau abgleichen<sup>11</sup>.

Dabei geht man am besten so vor: Von den Koeffizienten  $A_1^j \dots A_K^j$  setzt man alle bis auf zwei gleich Null, bestimmt die Lösungen, die die Gl. (3) und (4) von (25a, b) befriedigen und prüft nach, ob die zwei Gleichungen (25c) verhältnismäßig genau erfüllt werden. Erfahrungsgemäß ergeben sich die besten Lösungen, wenn einer der beiden Koeffizienten, die nicht Null gesetzt werden,  $A_1^j$  ist. Man wird dann unter den

<sup>11</sup> Diese beiden Gleichungen erhält man für die ersten Terme der zu den Gliedern der Ordnung  $h^{n+3}$ ,  $h^{n+4}$  gehörigen Ableitungen.



Paaren  $A_1^j, A_K^j; \dots, A_1^j A_{K-1}^j; \dots$  eines finden, das die Bedingungen am besten erfüllt. Die so gefundenen Werte für die  $A_i^j$  setzt man in die Gl. (5) ein und sucht Lösungen  $B_i^j$ , die diese Gleichung erfüllen. Dabei genügt es, alle  $B_i^j$  bis auf eines Null zu setzen; durch Versuch wird man auch hier den günstigsten Weg finden. Aus den Gl. (1) und (2) ergeben sich dann die Werte für  $A_0^j$  und  $B_0^j$ .

Die Wahl der Schrittzahl  $K$  richtet sich darnach, wie sich die einfachsten Koeffizienten für die Gleichungssysteme ergeben.

Zur Prüfung, ob die Schrittweite klein genug ist, empfiehlt es sich, die Rechnung entsprechend mit doppelter oder halber Schrittweite zu wiederholen. Das Ergebnis gilt dann als gut, wenn dabei keine zu großen Abweichungen eintreten.

3. Das verallgemeinerte Blaeß-Verfahren für Differentialgleichungen 3. und 4. Ordnung.

Nachstehend sind Schema und Verbesserungswerte [aus den Gleichungssystemen (25) berechnet] für die praktisch wichtigen Differentialgleichungen 3. und 4. Ordnung angegeben.

a) Differentialgleichungen 3. Ordnung.

Es sei eine Differentialgleichung 3. Ordnung

$$y''' = f(x, y, y', y'')$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad y' = v_0, \quad y'' = w_0$$

nach dem Blaeß-Verfahren zu lösen. Unter Benutzung der Abkürzungen

$$w_i \frac{h^2}{2} = \alpha_i$$
$$f_i \frac{h^3}{3!} = \beta_i$$

erhält man folgendes Schema (für Schrittzahl  $k = 4$ ):

Es ist<sup>12</sup>:

<sup>12</sup> Blaeß hat für Differentialgleichungen 3. Ordnung Verbesserungen angegeben (siehe Anm. 2), die eine Genauigkeit bis zu Taylor-Gliedern 4. Ordnung geben, während die hier ermittelten eine Genauigkeit bis zu Gliedern 5. Ordnung bewirken.

Tabelle 3. Schema nach Blaeß für Differentialgleichungen 3. Ordnung.

(26 a)

Nr.	$x_i$	$y_i$	$v_i h$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\beta_i$
0	$x_0$	$y_0$	$v_0 h$	$\alpha_0$	$\beta_0 = f_0(x_0, y_0, v_0, w_0)$	$\frac{h^3}{3!} w_0$
1	$x_0 + h$	$\tilde{y}_1 = y_0 + v_0 h + \alpha_0$	$\tilde{v}_1 h = v_0 h + \alpha_1$	$\tilde{\alpha}_1 = \alpha_0 + 3\beta_0$	$\beta_1 = f(x_0 + h, \tilde{y}_1, \tilde{v}_1, \tilde{w}_1)$	$\frac{h^3}{3!} \tilde{w}_1$
2	$x_0 + 2h$	$\tilde{y}_2 = y_0 + v_1 h + \alpha_1$	$\tilde{v}_2 h = v_1 h + \alpha_2$	$\tilde{\alpha}_2 = \alpha_1 + 3\beta_1$	$\beta_2 = f(x_0 + 2h, \tilde{y}_2, \tilde{v}_2, \tilde{w}_2)$	$\frac{h^3}{3!} \tilde{w}_2$
3	$x_0 + 3h$	$\tilde{y}_3 = y_0 + v_2 h + \alpha_2$	$\tilde{v}_3 h = v_2 h + \alpha_3$	$\tilde{\alpha}_3 = \alpha_2 + 3\beta_2$	$\beta_3 = f(x_0 + 3h, \tilde{y}_3, \tilde{v}_3, \tilde{w}_3)$	$\frac{h^3}{3!} \tilde{w}_3$
4	$x_0 + 4h$	$\tilde{y}_4 = y_0 + v_3 h + \alpha_3$	$\tilde{v}_4 h = v_3 h + \alpha_4$	$\tilde{\alpha}_4 = \alpha_3 + 3\beta_3$	$\beta_4 = f(x_0 + 4h, \tilde{y}_4, \tilde{v}_4, \tilde{w}_4)$	$\frac{h^3}{3!} \tilde{w}_4$
4	$x_0 + 4h$	$y_4 = y_0 + v_4 h + \alpha_4$	$v_4 h = v_4 h + V_1$	$\alpha_4 = \alpha_4 + V_2$		



$$\begin{aligned}
 V_0 &= \frac{46 \beta_3 + 282 \beta_1 - 328 \beta_0}{15} + 8 f_{y''} h (\beta_4 - \beta_0) \\
 V_1 &= \frac{14 \beta_3 + 24 \beta_1 - 38 \beta_0}{3} + 8 f_{y''} h (\beta_4 - \beta_0) \\
 V_2 &= \frac{4 \beta_4 + 2 \beta_1 - 6 \beta_0}{3} + 3 f_{y''} h (\beta_4 - \beta_0)
 \end{aligned}
 \tag{26b}$$

Anmerkung: Die 4. Spalte des Schemas müßte eigentlich lauten:  $\tilde{v}_1 h = v_0 h + 2 \alpha_0 + 3 \beta_0$ , was aber durch  $\tilde{v}_1 h = v_0 h + \alpha_0 + \tilde{\alpha}_1$  ersetzt werden kann, wodurch man sich einige Rechenarbeit erspart. Natürlich muß dann zuerst die 5. Spalte errechnet werden.

b) *Differentialgleichungen 4. Ordnung.*

Eine Differentialgleichung 4. Ordnung

$$y^{IV} = f(x, y, y', y'', y''')$$

sei mit den Anfangsbedingungen

$$x = x_0, y = y_0, y' = v_0, y'' = w_0, y''' = z_0$$

nach dem verallgemeinerten Blaeß-Verfahren zu lösen. Unter Verwendung der Abkürzungen

$$w_i \frac{h^2}{2!} = \alpha_i$$

$$z_i \frac{h^3}{3!} = \beta_i$$

$$f_i \frac{h^4}{4!} = \gamma_i$$

erhält man folgendes Schema und folgende Verbesserungsformeln (für Schrittzahl 4):

Tabelle 4. Schema nach Blaeß für Differentialgleichungen 4. Ordnung.

Nr.	$x_i$	$y_i$	$v_i h$
0	$x_0$	$y_0$	$v_0 h$
1	$x_0 + h$	$\tilde{y}_1 = y_0 + v_0 h + \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0$	$\tilde{v}_1 h = v_0 h + 2 \alpha_0 + 2 \beta_0 + \tilde{\beta}_1$
2	$x_0 + 2h$	$\tilde{y}_2 = \tilde{y}_1 + \tilde{v}_1 h + \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\beta}_1 + \gamma_1$	$\tilde{v}_2 h = \tilde{v}_1 h + 2 \tilde{\alpha}_1 + 2 \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2$
3	$x_0 + 3h$	$\tilde{y}_3 = \tilde{y}_2 + \tilde{v}_2 h + \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\beta}_2 + \gamma_2$	$\tilde{v}_3 h = \tilde{v}_2 h + 2 \tilde{\alpha}_2 + 2 \tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}_3$
4	$x_0 + 4h$	$\tilde{y}_4 = \tilde{y}_3 + \tilde{v}_3 h + \tilde{\alpha}_3 + \tilde{\beta}_3 + \gamma_3$	$\tilde{v}_4 h = \tilde{v}_3 h + 2 \tilde{\alpha}_3 + 2 \tilde{\beta}_3 + \tilde{\beta}_4$
		$V_0$	$V_1$
4	$x_0 + 4h$	$y_4 = \tilde{y}_4 + V_0$	$v_4 h = \tilde{v}_4 h + V_1$

Nr.	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\gamma_i$
0	$\alpha_0$	$\beta_0$	$\gamma_0 = f_0(x_0, y_0, v_0, w_0, z_0) \frac{h^4}{4!}$
1	$\tilde{\alpha}_1 = \alpha_0 + 3 \beta_0 + 6 \gamma_0$	$\tilde{\beta}_1 = \beta_0 + 4 \gamma_0$	$\gamma_1 = f(x_0 + h, \tilde{y}_1, \tilde{v}_1, \tilde{w}_1, \tilde{z}_1) \frac{h^4}{4!}$
2	$\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_1 + 3 \tilde{\beta}_1 + 6 \gamma_1$	$\tilde{\beta}_2 = \tilde{\beta}_1 + 4 \gamma_1$	$\gamma_2 = f(x_0 + 2h, \tilde{y}_2, \tilde{v}_2, \tilde{w}_2, \tilde{z}_2) \frac{h^4}{4!}$
3	$\tilde{\alpha}_3 = \tilde{\alpha}_2 + 3 \tilde{\beta}_2 + 6 \gamma_2$	$\tilde{\beta}_3 = \tilde{\beta}_2 + 4 \gamma_2$	$\gamma_3 = f(x_0 + 3h, \tilde{y}_3, \tilde{v}_3, \tilde{w}_3, \tilde{z}_3) \frac{h^4}{4!}$
4	$\tilde{\alpha}_4 = \tilde{\alpha}_3 + 3 \tilde{\beta}_3 + 6 \gamma_3$	$\tilde{\beta}_4 = \tilde{\beta}_3 + 4 \gamma_3$	$\gamma_4 = f(x_0 + 4h, \tilde{y}_4, \tilde{v}_4, \tilde{w}_4, \tilde{z}_4) \frac{h^4}{4!}$
	$V_2$	$V_3$	
4	$\alpha_4 = \tilde{\alpha}_4 + V_2$	$\beta_4 = \tilde{\beta}_4 + V_3$	

(27 a)

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{242 \gamma_3 + 4880 \gamma_1 - 4322 \gamma_0}{45} + \frac{128 f_{y'''} h}{5} (\gamma_4 - \gamma_0) \\ V_1 &= \frac{184 \gamma_3 + 1128 \gamma_1 - 1312 \gamma_0}{15} + 32 f_{y'''} h (\gamma_4 - \gamma_0) \\ V_2 &= \frac{28 \gamma_3 + 48 \gamma_1 - 76 \gamma_0}{3} + 16 f_{y'''} h (\gamma_4 - \gamma_0) \\ V_3 &= \frac{16 \gamma_4 + 8 \gamma_1 - 24 \gamma_0}{9} + 4 f_{y'''} h (\gamma_4 - \gamma_0) \end{aligned}$$

(27 b)

Die erreichte Genauigkeit geht bis zu Gliedern 6. Ordnung.

Anmerkung: Auch hier ist die 4. Spalte etwas vereinfacht. Es muß die vorletzte Spalte vor der 3. Spalte berechnet werden.

c) Zahlenbeispiel.

Ein Zahlenbeispiel einer Differentialgleichung 4. Ordnung soll noch die Anwendung des Verfahrens für Differentialgleichungen höherer Ordnung zeigen.

Für die Differentialgleichung

$$y^{IV} = -y^{III}$$

sollen für die Anfangsbedingungen

$$x_0 = y_0 = 0, \quad v_0 = w_0 = z_0 = 1$$

die Werte für  $x = 0.24$  berechnet werden. Die exakte Lösung für die Anfangsbedingungen lautet:

$$y = -e^{-x} + 1 + x^2.$$

Die Schrittweite  $h$  ist 0.06. Der Gang der Rechnung ist aus folgender Tabelle 5 ersichtlich:

Tabelle 5. Rechengang nach dem verallgemeinerten Blaeß-Verfahren für die Differentialgleichung  $y^{IV} = -y^{III}$ .

Nr.	$x_i$	$y_i$	$v_i h$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\gamma_i$
0	0.00	0.000000000	0.060000000	0.001800000	0.000036000	— 0.000000540
1	0.06	0.061835460	0.063705840	0.001904760	0.000033840	— 0.000000507
2	0.12	0.127479392	0.067614846	0.002003234	0.000031809	— 0.000000477
3	0.18	0.197128808	0.071714838	0.002095806	0.000029901	— 0.000000448
4	0.24	0.270968901	0.075994349	0.002182813	0.000028107	— 0.000000421
	+ V	+ 34297	+ 35589	+ 13724	+ 2393	
		0.2709723307	0.0759979085	0.0021871856	0.0000283465	} verbesserte Werte
	+ K	— 1818	— 2272	— 1136	— 284	
		0.2709721489	0.0759976813	0.0021840720	0.0000283181	
		0.2709721389	0.0759976717	0.0021840698	0.0000283186	exakte Werte

(Eingegangen am 8. Februar 1949.)



# Die Berechnung von Faltwerken durch Iteration\*.

Von H. Craemer, Beograd (Jugoslawien).

Mit 6 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Betrachtet man die Einzelscheiben eines prismatischen Faltwerkes ohne Rücksicht auf ihren gegenseitigen Zusammenhang, so sind die Biegespannungen beiderseits einer Kante im allgemeinen verschieden; der Ausgleich erfolgt durch dort wirkende Schubkräfte. Abweichend vom bisher üblichen Verfahren wird schrittweise nur der Einfluß von jeweils einer solchen Schubkraft betrachtet.

**Summary.** Bending stresses of each particular member of the compound system are first computed without respect to their mutual connection; the stresses thus obtained are different on each side of the edges. These stresses are compensated by transverse strains acting there. They are computed in one member only; by repeating the procedure for all joints similarly to Cross's method, the true action of the compound system is got step by step.

**Résumé.** En regardant une seule dalle d'une construction pliée sans tenir compte de leur influence mutuelle, on trouve que les tensions de flexion à chaque coté d'un bord sont généralement différentes; elles se compensent par des forces transversales à cet endroit. Autrement que dans les procédés employés jusqu'ici, l'influence d'une seule force transversale est analysée, et en repetant ce procédé pas à pas on obtient les tensions exactes du système entier.

Verbindet man nach Abb. 1 mehrere in verschiedenen Ebenen liegende sehr dünne, also scheibenartige Balken längs ihrer Schnittkanten, so entsteht ein Tragwerk von grundsätzlich neuer Wirkung, das Faltwerk<sup>1</sup>. In dem bei weitem wichtigsten Sonderfall des prismatischen Faltwerkes, auf den wir uns hier beschränken wollen, sind die Schnittkanten parallel. Ferner sei vorausgesetzt, daß in einer Kante nur zwei Einzelscheiben zusammenstoßen, daß es sich also um ein „einfaches“ Faltwerk handelt.

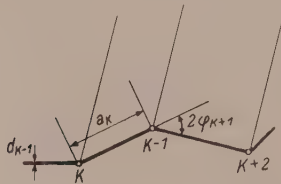


Abb. 1.

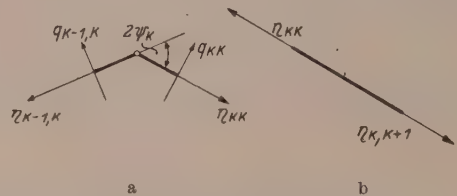


Abb. 2.

Die Stützung erfolgt entweder durch zwei oder mehrere zu den Schnittkanten meist senkrecht laufende Binderscheiben oder durch Einspannung am Fuß, wie z. B. bei Kühltürmen oder Unterbauten von Wassertürmen.

Die Elastizitätstheorie der Faltwerke ist an sich bekannt<sup>2, 3</sup>. Hier soll gezeigt werden, wie man in vielen Fällen die Berechnung durch ein Iterationsverfahren vereinfachen kann, das demjenigen ähnlich ist, das Cross für den durchlaufenden Balken und andere Stabwerke angegeben hat. Wir wiederholen zunächst diejenigen bereits bekannten Zusammenhänge und Formeln, die wir für die folgende Ableitung benötigen. Alle dargestellten Kräfte sind positiv zu rechnen, wenn sie in der in den Skizzen eingezeichneten Richtung wirken.

\* Herrn Prof. Dr. E. Melan zum 60. Geburtstag gewidmet.

<sup>1</sup> H. Craemer: Scheiben und Faltwerke als neue Konstruktionselemente des Eisenbetonbaues. Beton u. Eisen 28, H. 13 (1929).

<sup>2</sup> H. Craemer: Allgemeine Theorie der Faltwerke. Beton u. Eisen 29, H. 15 (1930).

<sup>3</sup> H. Craemer: Der heutige Stand der Theorie der Scheibenträger und Faltwerke. Beton u. Eisen 36, H. 16 (1937).

Da die Kanten im Raume festliegen, wirkt das Tragwerk gegenüber senkrecht zu den Einzelscheiben gerichteten Lasten bekanntlich wie eine über die Kanten gespannte durchlaufende Platte; ihre auf die Einheit der Schnittlänge bezogenen Momente  $m$  und Querkräfte  $q$  sind infolgedessen bekannt. Das Gleichgewicht eines Elementes, das durch zwei unmittelbar neben einer Kante geführte Schnitte gebildet wird, erfordert das Auftreten von Normalkräften  $n$ , siehe Abb. 2a; im folgenden bezieht sich der erste Index stets auf das zugehörige Feld, der zweite auf die Kante. Es ist dann

$$n_{k-1,k} \text{ bzw. } n_{kk} = \frac{1}{2} [q_{k-1,k} (\pm \operatorname{tg} \psi_k + \operatorname{ctg} \psi_k) + q_{kk} (\pm \operatorname{tg} \psi_k + \operatorname{ctg} \psi_k)]. \quad (1)$$

Eine aus dem Zusammenhang gelöste Einzelscheibe wird also in Richtung fortschreitender Ordnungsziffern  $k$  nach Abb. 2b mit

$$p_k = n_{k,k+1} - n_{kk} \quad (2)$$

belastet; diese Belastung muß nach den Binderscheiben abgetragen werden, erzeugt also Momente  $M_k$  nach Abb. 3. An den beiden Rändern  $k$  und  $k+1$  der Einzelscheibe  $k$  entstehen infolgedessen die Spannungen

$$\sigma_{0k} = \frac{6 M_k}{d_k a_k^2}; \quad (3)$$

sie sollen, im Gegensatz zu der üblichen Festsetzung, beide positiv sein, wenn das Moment positiv ist.

Diese Spannungen sind in der gleichen Kante im allgemeinen verschieden, je nachdem wir sie der einen oder der anderen der beiden anstoßenden Einzelscheiben zuordnen, und zwar ist infolge unserer Vorzeichenvereinbarung

$$\sigma_{0,k-1} + \sigma_{0k}$$

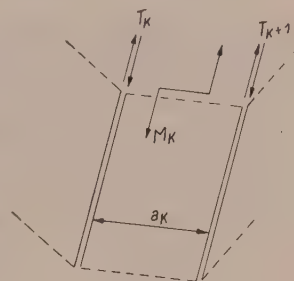


Abb. 3.

der zu beiden Seiten der Kante  $k$  auftretende Spannungsunterschied. Der Ausgleich erfolgt ähnlich wie beim verdübelten Balken durch Schubspannungen  $\tau_k$  in den Verbindungskanten, die wir zu Schubkräften  $\int \tau_k d_k dx$  zusammenfassen, wobei das Integral über den abgeschnittenen Teil zu erstrecken ist, siehe Abb. 3. Aus den Kernmomenten findet man nun leicht, daß eine Schubkraft  $T_k$  für sich allein in den beiden anstoßenden Einzelscheiben  $k-1$  und  $k$  die Spannungen

$$\sigma_{k-1,k} = -4 \frac{T_k}{d_{k-1} a_{k-1}}, \quad \sigma_{kk} = -4 \frac{T_k}{d_k a_k} \quad (4)$$

hervorrufen; die Vorzeichen sind wie in Gl. (3) so gewählt, daß die Spannungen als positiv bezeichnet werden, wenn ihnen eine in Richtung fortschreitender Ordnungsziffern  $k$  gesehen konkave Krümmung entspricht; der zu beiden Seiten der Kante auftretende Spannungsunterschied ist also diesmal

$$\sigma_{k-1,k} + \sigma_{kk}$$

Die gleiche Schubkraft erzeugt an den gegenüberliegenden Kanten  $k-1$  und  $k+1$  die Spannungen

$$\sigma_{k-1,k-1} = \frac{1}{2} \sigma_{k-1,k}, \quad \sigma_{k,k+1} = \frac{1}{2} \sigma_{kk}. \quad (5)$$

Aus der Bedingung, daß die aus den Momenten  $M$  und Schubkräften  $T$  zusammen herrührenden Spannungen zu beiden Seiten einer Kante die gleichen sein müssen, erhält man in der bisherigen Theorie der Faltwerke<sup>2,3</sup> entweder die Dreischübe-gleichung oder die Dreispannungsgleichung, das heißt dreigliedrige Gleichungen, die je drei aufeinanderfolgende Schubkräfte  $T_k$  oder Biegespannungen  $\sigma_k$  enthalten.



Statt dessen verwenden wir im folgenden ein Schrittverfahren, indem wir den Ausgleich der Biegespannungen zunächst nur an einer Kante, z. B.  $k$ , vornehmen und dabei annehmen, daß nur eine Schubkraft, nämlich  $T_k$ , vorhanden ist. Die Gleichheit der Spannungen aus  $M_{k-1}$ ,  $M_k$  und  $T_k$  zusammen beiderseits dieser Kante ergibt dann

$$\sigma_{0, k-1} + \sigma_{0k} = -(\sigma_{k-1, k} + \sigma_{kk}). \quad (6)$$

Da nach Gl. (4)

$$\sigma_{k-1, k} : \sigma_{kk} = a_k d_k : a_{k-1} d_{k-1}$$

ist, muß demnach für diesen ersten Schritt des Ausgleiches

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{k-1, k} &= -\frac{a_k d_k}{a_{k-1} d_{k-1} + a_k d_k} (\sigma_{0, k-1} + \sigma_{0k}), \\ \sigma_{kk} &= -\frac{a_{k-1} d_{k-1}}{a_{k-1} d_{k-1} + a_k d_k} (\sigma_{0, k-1} + \sigma_{0k}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

sein; im Sonderfalle, das beide anstoßenden Scheiben gleich stark sind, wird

$$\sigma_{k-1, k} = \sigma_{kk} = -\frac{1}{2} (\sigma_{0, k-1} + \sigma_{0k}). \quad (7a)$$

Wie man sieht, ist die Kenntnis der Schubkraft selbst für den Ausgleich gar nicht nötig.

Wir nehmen nun nach und nach auch an den übrigen Kanten den Ausgleich vor; dabei berücksichtigen wir auch die bei den vorangegangenen Schritten entstandenen Spannungen gemäß Gl. (5). Im Verlauf dieser Rechnung entstehen an den früher ausgeglichenen Kanten neue Ungleichheiten, die wir solange von neuem beseitigen, bis die Genauigkeit ausreicht.

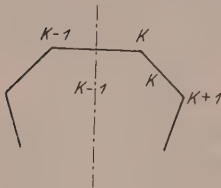


Abb. 4.

Wird eine Einzelscheibe, z. B.  $k-1$ , durch eine Symmetrieebene von Last und System gekreuzt, siehe Abb. 4, so ist es zweckmäßig, den Ausgleich an ihren Kanten  $k-1$  und  $k$  gleichzeitig vorzunehmen. Es ist dann  $T_{k-1} = -T_k$  und

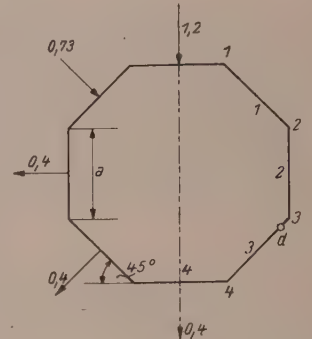


Abb. 5.

demnach

$$\sigma_{k-1, k} = -\frac{2 T_k}{a_{k-1} d_{k-1}}, \quad \sigma_{kk} = -\frac{4 T_k}{a_k d_k}, \quad (8)$$

$$\sigma_{k-1, k} : \sigma_{kk} = a_k d_k : 2 a_{k-1} d_{k-1}.$$

An Stelle von Gl. (7) für den ersten Schritt erhält man deshalb

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{k-1, k} &= -\frac{a_k d_k}{a_k d_k + 2 a_{k-1} d_{k-1}} (\sigma_{0, k-1} + \sigma_{0k}), \\ \sigma_{kk} &= -\frac{2 a_{k-1} d_{k-1}}{a_k d_k + 2 a_{k-1} d_{k-1}} (\sigma_{0, k-1} + \sigma_{0k}), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

während für  $\sigma_{k, k+1}$  die Gl. (5) gültig bleibt. Im Falle gleichstarker Einzelscheiben wird insbesondere

$$\sigma_{k-1, k} = -\frac{1}{3} (\sigma_{0, k-1} + \sigma_{0k}), \quad \sigma_{kk} = -\frac{2}{3} (\sigma_{0, k-1} + \sigma_{0k}). \quad (9a)$$

Als Beispiel untersuchen wir einen achteckigen Turmschaft mit der Kantenlänge  $a$  und  $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$  nach Abb. 5, in deren rechter Hälfte die Bezifferung angegeben ist. Er sei durch Wind derart belastet, daß der Staudruck  $p_s$ , mit den in der linken Hälfte der Abbildung angegebenen Ziffern vervielfacht, die Belastung je Flächeneinheit ergibt. Die Berechnung für diese Kräfte als Rahmen mit unverschieblichen Knoten bietet nichts Neues und liefert die Querkräfte unmittelbar neben den Kanten für die Einheit der Höhe zu

$$\begin{aligned}
 q_{01} &= -0.600 p_s a, & q_{11} &= -0.451 p_s a, & q_{12} &= -0.279 p_s a, \\
 q_{22} &= 0.145 p_s a, & q_{23} &= 0.255 p_s a, & q_{33} &= 0.215 p_s a, \\
 q_{34} &= 0.185 p_s a, & q_{44} &= 0.200 p_s a;
 \end{aligned}$$

sie wurden als positiv angenommen, wenn sie den Knoten nach außen belasten.

Nach Gl. (1) erhält man hieraus die Normalkräfte

$$\begin{aligned}
 n_{01} &= -\frac{1}{2} [0.600 (-0.414 + 2.414) + 0.451 (0.414 + 2.414)] p_s a \\
 &= -1.237 p_s a
 \end{aligned}$$

und im übrigen:

$$\begin{aligned}
 n_{11} &= -1.300 p_s a, & n_{12} &= -0.074 p_s a, & n_{22} &= -0.250 p_s a, \\
 n_{23} &= 0.559 p_s a, & n_{33} &= 0.575 p_s a, & n_{34} &= 0.468 p_s a, \\
 n_{44} &= 0.461 p_s a.
 \end{aligned}$$

Setzt man dies in Gl. (2) ein, so folgt

$$p_0 = p_4 = 0, \quad p_1 = 1.226 p_s a, \quad p_2 = 0.809 p_s a, \quad p_3 = -0.107 p_s a.$$

Steht der Turm auf die Höhe  $l$  frei, so sind die Momente der Einzelscheiben an der Einspannstelle

$$\begin{aligned}
 M_0 &= M_4 = 0, & M_1 &= -0.613 p_s a l^2, & M_2 &= -0.4045 p_s a l^2, \\
 M_3 &= +0.0535 p_s a l^2
 \end{aligned}$$

und die Spannungen ohne Rücksicht auf den gegenseitigen Zusammenhang betragen

$$\begin{aligned}
 \sigma_{00} &= \sigma_{04} = 0, & \sigma_{01} &= -3.678, \\
 \sigma_{02} &= -2.427, & \sigma_{03} &= +0.321 p_s l^2/a d.
 \end{aligned}$$

Die Tabelle am Schlusse entspricht der halben Abwicklung des Faltwerkes. Der erste Ausgleich wurde bei Kante 2 vorgenommen; der Spannungsunterschied der  $\sigma_0$  mit zusammen  $-6.105$  wurde durch den Unterschied der Spannungen infolge Schubkraft gemäß Gl. (7a) mit  $2(+3.053)$  vorgenommen; der Faktor  $p_s l^2/a d$  wurde überall fortgelassen. Der vollzogene Ausgleich ist durch einen Querstrich gekennzeichnet. Durch die beigeetzten Buchstaben  $a$  bis  $p$  ist die Reihenfolge der Schritte bezeichnet, um eine spätere Nachprüfung zu erleichtern.

Die infolge des ersten Schrittes bei 1 und 3 entstehenden Spannungen betragen  $\frac{1}{2} 3.053 = +1.526$ . Bei 1 ist dann außer  $\sigma_0 = -3.678$  auch die vorstehende Spannung, zusammen also  $-2.152$  auszugleichen, und zwar gemäß Gl. (9a) mit  $(+2.152) = 1.435$  in Scheibe 1 und  $0.717$  in Scheibe 0. Wir gehen nun zur Kante 3 über; dort müssen die bereits vorhandenen Spannungen von  $-2.427 + 0.321 + 1.526 = -0.580$  durch  $2 \cdot (+0.290)$  ausgeglichen werden, wobei in den Kanten 2 und 4 neue Spannungen von je  $+0.145$  entstehen. Nach insgesamt 16 Schritten ist der Ausgleich erreicht, wenn man von den belanglosen Resten bei den Kanten 1 und 4 neben den Querstrichen  $n$  und  $p$  absieht. Die endgültigen Spannungen ergeben sich dann durch Summierung aller oberhalb der doppelten Querstriche stehenden Einzelbeträge; sie sind in Abb. 6 bildlich dargestellt und zeigen die bekannte Tatsache, daß für das Faltwerk als ganzes das Naviersche Gesetz nicht gültig ist.

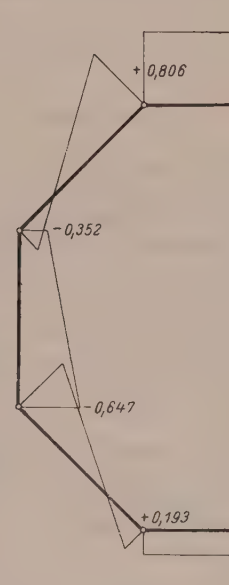


Abb. 6.



Scheibe 0	Scheibe 1	Scheibe 2	Scheibe 3	Scheibe 4			
Kante 1		Kante 2		Kante 3		Kante 4	
(0'333)	(0'667)	(0'500)	(0'500)	(0'500)	(0'500)	(0'667)	(0'333)
0'000	— 3'678	— 3'678	— 2'427	— 2'427	+ 0'321	+ 0'321	0'000
	+ 1'526	+ 3'053	+ 3'052 <sup>a</sup>	+ 1'526			
+ 0'717	+ 1'435	+ 0'717	+ 0'145 <sup>a</sup>	+ 0'290	+ 0'290	+ 0'145	
	— 0'215 <sup>b</sup>	— 0'431	— 0'431	— 0'215	— 0'155 <sup>c</sup>	— 0'311	— 0'155 <sup>d</sup>
+ 0'072	+ 0'143	+ 0'072	+ 0'092 <sup>e</sup>	+ 0'185	+ 0'185 <sup>f</sup>	+ 0'092	
	— 0'041 <sup>g</sup>	— 0'082	— 0'082	— 0'041	— 0'031	— 0'061	— 0'031 <sup>i</sup>
+ 0'014	+ 0'027	+ 0'014	+ 0'018 <sup>h</sup>	+ 0'036	+ 0'036	+ 0'018	
	— 0'008 <sup>k</sup>	— 0'016	— 0'016	— 0'008	— 0'006 <sup>j</sup>	— 0'012	— 0'006 <sup>m</sup>
+ 0'003	+ 0'005	+ 0'003	+ 0'003 <sup>l</sup>	+ 0'007	+ 0'007 <sup>o</sup>	+ 0'003	
						— 0'002	— 0'001 <sup>p</sup>
+ 0'806	— 0'806	— 0'350	+ 0'354	— 0'647	+ 0'647	+ 0'193	— 0'193

(Eingegangen am 11. Mai 1949.)

## Richtungs-Doppelfokussierung von Elektronenbahnen in inhomogenen elektrisch-magnetischen Feldern\*.

Von W. Glaser, Wien.

Mit 1 Textabbildung.

**Zusammenfassung.** Die Fokussierung durch ein Elektronenstrahlbündel, dessen Hauptstrahl ein zur Feldachse eines zylindersymmetrischen elektrisch-magnetischen Feldes symmetrisch gelegener Kreis ist, wird untersucht. Die Fokussierung ist im allgemeinen astigmatisch. Die Bedingungen für das Feldgefälle in der unmittelbaren Umgebung des Hauptstrahles dafür, daß die Abbildung anastigmatisch ist, werden angegeben. Auf die Anwendungsmöglichkeiten der Anordnung in der Geschwindigkeits- und Massenspektroskopie wird hingewiesen.

**Summary.** The focusing by electron beams, the main beam of which is a circle situated symmetrically to the axis of an axially-symmetrical electromagnetic field, is investigated. The focusing is in general an astigmatic one. The conditions for the variation of the field in the adjoining neighbourhood of the main beam, in order to get an anastigmatic image formation, are described. The possibilities for application of the device in velocity- and mass-spectroscopy are indicated.

**Résumé.** On examine la focalisation d'un faisceau d'électrons le rayon principal du quel est un cercle situé symétriquement à l'axe d'un champ électromagnétique de symétrie rotatoire. La focalisation est en général astigmatique. Les conditions de focalisation aux environs du rayon principal pour obtenir une représentation anastigmatique sont discutées. Des applications du dispositif en spectroscopie de vitesses et de masses sont indiquées.

In den meisten abbildenden elektronenoptischen Systemen benützt man Elektronenstrahlbündel, deren Hauptstrahl mit der Rotationsachse des axialsymmetrischen Feldes übereinstimmt. Man kann sagen, daß in diesem Falle das Strahlenbündel zum Felde „longitudinal“ liegt. Bei vielen elektronenoptischen Anordnungen anderer Art, z. B. in der Geschwindigkeits- und Massenspektrographie, betrachtet man jedoch gerade den anderen Grenzfall, bei welchem der Hauptstrahl ein zur Feldachse symmetrisch liegender Kreis in einer zu ihr senkrechten Ebene ist. Wir können sagen, daß in diesem Falle das Bündel „transversal“ zum axialsymmetrischen Felde liegt. In beiden Fällen sind die Hauptstrahlen bestimmte ausgezeichnete Elektronenbahnen, die dadurch gekennzeichnet sind, daß die Beschleunigungen senkrecht zur Bahn verschwinden. Man spricht von sogenannten „quasistatischen“ Elektronen-

\* Herrn Prof. Dr. E. Melan zum 60. Geburtstag gewidmet.

bahnen. Die Fokussierungseigenschaften der zur kreisförmigen Hauptbahn benachbarten Elektronenbahnen in „transversalen“ Bündeln sind bereits 1938 unter allgemeinen elektronenoptischen Gesichtspunkten von R. Wallauschek in seiner Prager Dissertation behandelt und wesentliche Ergebnisse daraus im Jahre 1940 veröffentlicht worden<sup>1</sup>. Man findet, daß für Nachbarstrahlen in der achsensenk-rechten Ebene  $z = \text{konst.}$  im allgemeinen ein anderer Fokussierungspunkt am kreisförmigen Hauptstrahl besteht als für die Nachbarstrahlen in der Zylinderfläche  $r = \text{konst.}$ <sup>2</sup>. Man hat es also mit einer astigmatischen Strahlenvereinigung zu tun und es ist gerade wichtig, die Fälle zu untersuchen, wo beide Fokussierungswinkel zusammenfallen, also eine anastigmatische Abbildung besteht. Bereits Wallauschek hat die hierfür notwendigen Bedingungen veröffentlicht und insbesondere auch eine aus dem elektrischen Feld eines Zylinderkondensators, dem homogenen Magnetfeld einer langen Spule und einem magnetischen Dipolfeld bestehende anastigmatische Anordnung angegeben. Im folgenden sollen nach einer vereinfachten und vervollständigten Herleitung der Fokussierungsbedingungen insbesondere die Bedingungen für eine stigmatische (anastigmatische) Abbildung weitergehend untersucht werden. Die Ergebnisse dieser Arbeit liegen bereits seit einigen Jahren vor, konnten aber nicht veröffentlicht werden. Sie dürften vielleicht auch deshalb nicht uninteressant sein, als K. Siegbahn und N. Svartholm<sup>3</sup> den in der Veröffentlichung von Wallauschek enthaltenen Gedanken einer doppelten Richtungs-fokussierung inzwischen durch die Konstruktion eines auf dieser Theorie beruhenden Betaspektrographen verwirklicht haben, und zwar für den einfachsten in der Theorie enthaltenen Spezialfall eines rein magnetischen Feldes

Bedeutet  $\varphi(r, z)$  das elektrische Potential und ist

$$\Psi(r, z) = \int_0^r B_z(r, z) df = 2\pi \int_0^r B_z(r, z) r dr \quad (1)$$

der magnetische Kraftfluß durch einen zur Achse senkrechten kreisförmigen Querschnitt, so läßt sich die Elektronenbewegung bekanntlich auf folgende Weise darstellen:

$$\ddot{r} = -\frac{\partial Q}{\partial r}, \quad \ddot{z} = -\frac{\partial Q}{\partial z} \quad (2)$$

wobei das „Potential“  $Q$  durch

$$Q = \eta \varphi - \frac{1}{2r^2} \left( \frac{\eta}{2\pi} \Psi + C \right)^2, \quad \eta = \frac{e}{m} \quad (3)$$

definiert ist. Da die Größe  $\Psi$  mit dem Vektorpotential  $A$  durch

$$2\pi r A = \Psi \quad (4)$$

zusammenhängt, kann man für  $Q$  auch

$$Q = \eta \varphi - \frac{\eta^2}{2} \left( A + \frac{C_1}{r} \right)^2 \quad (5)$$

schreiben, was mit der gewöhnlichen, zuerst von C. Störmer und H. Busch<sup>4</sup> angegebenen Gestalt übereinstimmt.

<sup>1</sup> R. Wallauschek: Z. Physik **117**, 569 (1941).

<sup>2</sup> Dies verlangt, daß die Fokussierung tatsächlich auf den beiden Flächen  $z = \text{konst.}$  und  $r = \text{konst.}$  erfolgt. Dies ist — wie wir sehen werden — nicht der allgemeinste Fall und erfordert die Erfüllung einer bestimmten Bedingung durch die abbildenden Felder. In der angeführten Arbeit wird sie stillschweigend vorausgesetzt.

<sup>3</sup> K. Siegbahn und N. Svartholm: Nature (London) **157**, 872 (1946). Ark. Mat. Astr. Fys. **33 A** n° 21, 1946, ferner F. B. Shull and D. M. Dennison, Phys. Rev. Vol. **71**, n° 10, 681 — 687, 1947 und P. Hubert, C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 302 — 304 (1940).

<sup>4</sup> C. Störmer: Arch. Sci. physiques natur. (1907). — H. Busch: Ann. Physik **81**, 974 (1926). — Vgl. auch V. E. Cosslett: Introduction to Electron Optics, S. 107, Oxford, 1946, bzw. zu Gl. (3) W. Glaser und E. Lammell: Ann. Physik **40**, 367 (1941).



Wenn wir mit  $\psi$  die azimutale Koordinate in unserem Zylinderkoordinatensystem  $r, z, \psi$  bezeichnen, so gilt der Flächensatz

$$\psi = \omega = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\eta}{2\pi} \Psi + C \right), \quad (6)$$

wodurch gleichzeitig die Konstante  $C$  in (3) definiert ist. Man erhält nun bestimmte ausgezeichnete Elektronenbahnen, sogenannte quasistatische Bahnen, wenn man

$$Q_r = \eta \varphi_r - \frac{\eta \omega}{2\pi} \Psi_r + \omega^2 r = 0, \quad Q_r = \frac{\partial Q}{\partial r}, \quad (7)$$

$$Q_z = \eta \varphi_z - \frac{\eta \omega}{2\pi} \Psi_z = 0, \quad Q_z = \frac{\partial Q}{\partial z} \quad (8)$$

nach  $r$  und  $z$  auflöst. Für diese Lösungen  $r = \bar{r}$ ,  $z = \bar{z}$  ist nach (2)  $\ddot{r} = 0$  und  $\ddot{z} = 0$ , das heißt  $\bar{r}$  und  $\bar{z}$  sind zeitlich konstant, wenn man  $\bar{r}_0 = 0$  und  $\dot{\bar{z}}_0 = 0$  wählt. Die dadurch gegebene Elektronenbahn ist ein Kreis vom Radius  $r = \bar{r}$  in einer achsen senkrechten Ebene  $z = \bar{z}$ . Der Zeitverlauf, in welchem diese Bahn durchlaufen wird, ergibt sich aus (6) zu

$$\omega = \dot{\psi} = \frac{1}{\bar{r}^2} \left[ \frac{\eta}{2\pi} \Psi(\bar{r}, \bar{z}) + C \right] \quad (9)$$

bzw.

$$\psi = \omega t + \text{konst.} \quad (10)$$

Durch besondere Wahl von  $C$  können wir daher eine beliebige Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , mit welcher die quasistatische Elektronenbahn durchlaufen wird, erreichen.

Nun betrachten wir die dieser Bahn unendlich benachbarten Bahnen

$$r = \bar{r} + \varrho(t), \quad z = \bar{z} + \zeta(t). \quad (11)$$

Durch Einsetzen von (11) in (2) erhält man mit Rücksicht auf

$$Q_r(\bar{r}, \bar{z}) = 0, \quad Q_z(\bar{r}, \bar{z}) = 0, \quad (12)$$

wenn wir nur die Glieder erster Ordnung in  $\varrho$  und  $\zeta$  bei der Entwicklung beibehalten,

$$\ddot{\varrho}(t) = Q_{rr} \varrho + Q_{rz} \zeta, \quad (13)$$

$$\ddot{\zeta}(t) = Q_{zr} \varrho + Q_{zz} \zeta. \quad (14)$$

Die Gleichungskoeffizienten  $Q_{rr}$ ,  $Q_{rz}$  und  $Q_{zz}$  (in die wir  $r = \bar{r}$  und  $z = \bar{z}$  einzusetzen haben) können dabei mit Benutzung von (7) und (8) und der für  $\varphi$  und  $\psi$  bestehenden Differentialgleichungen

$$\varphi_{rr} + \varphi_{zz} + \frac{1}{r} \varphi_r = 0, \quad \Psi_{rr} + \Psi_{zz} - \frac{1}{r} \Psi_r = 0 \quad (15)$$

nach einigen Reduktionen auf eine zweckmäßige Gestalt gebracht werden, wenn wir noch zur Abkürzung die dimensionslosen Verhältnisse zwischen den radialen und longitudinalen Kräften zur Fliehkraft auf der quasistatischen Bahn einführen:

$$\kappa = \frac{e \varphi_r}{m \omega^2 r} = \frac{e \Psi_r}{2\pi m \omega r} - 1, \quad r = \bar{r}, \quad z = \bar{z}, \quad (16)$$

$$\lambda = \frac{e \varphi_z}{m \omega^2 r} = \frac{e \Psi_z}{2\pi m \omega r}, \quad r = \bar{r}, \quad z = \bar{z}, \quad (17)$$

nämlich:

$$Q_{rr} = -\omega^2 \left[ 1 + \kappa^2 + \frac{e}{m \omega^2} \left( \varphi_{zz} - \frac{\omega}{2\pi} \Psi_{zz} \right) \right] \quad (18)$$

$$Q_{rz} = -\omega^2 \left[ \lambda(\kappa - 1) - \frac{e}{m \omega^2} \left( \varphi_{rz} - \frac{\omega}{2\pi} \Psi_{rz} \right) \right] \quad (19)$$

$$Q_{zz} = -\omega^2 \left[ \lambda^2 - \frac{e}{m \omega^2} \left( \varphi_{zz} - \frac{\omega}{2\pi} \Psi_{zz} \right) \right]. \quad (20)$$

Durch eine Drehung des Koordinatensystems um den Winkel  $\vartheta$

$$\bar{\varrho} = \varrho \cos \vartheta + \zeta \sin \vartheta, \quad \bar{\zeta} = \zeta \cos \vartheta - \varrho \sin \vartheta \quad (21)$$

können wir erreichen, daß die Differentialgleichungen (13), (14) die Gestalt

$$\ddot{\bar{\varrho}} = -\alpha_1^2 \bar{\varrho}, \quad \ddot{\bar{\zeta}} = -\alpha_2^2 \bar{\zeta} \quad (22)$$

erhalten. Die Richtungen der neuen Achsen sind die „Hauptschwingungsrichtungen“ und die Schwingungen (22) selbst die „Haupt- oder Normalschwingungen“. Man gelangt zu (22), indem man für  $\varrho$  und  $\zeta$  mittels (21) die neuen Variablen  $\bar{\varrho}$  und  $\bar{\zeta}$  einführt und  $\vartheta$  so bestimmt, daß der Koeffizient von  $\bar{\zeta}$  in der Differentialgleichung für  $\bar{\varrho}$  Null wird. Für den Winkel  $\vartheta$ , um welchen die Hauptschwingungsrichtungen gegenüber der  $r$ - und  $z$ -Richtung gedreht sind, erhält man so

$$\operatorname{tg} 2 \vartheta = \frac{2 Q_{rz}}{Q_{rr} - Q_{zz}}. \quad (23)$$

Die beiden Hauptfrequenzen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  folgen entweder aus der Gestalt der Gl. (22) oder noch einfacher, wenn man mit dem üblichen Ansatz

$$\varrho = C_1 e^{i \alpha t}, \quad \zeta = C_2 e^{i \alpha t} \quad (24)$$

in die ursprünglichen Differentialgleichungen eingeht. Man erhält so in bekannter Weise für das Frequenzquadrat die biquadratische Gleichung

$$\begin{vmatrix} Q_{rr} + \alpha^2 & Q_{rz} \\ Q_{rz} & Q_{zz} + \alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha^4 + \alpha^2 (Q_{rr} + Q_{zz}) + Q_{rr} Q_{zz} - Q_{rz}^2 = 0, \quad (25)$$

welche die beiden Lösungen

$$\alpha_{1,2}^2 = -\frac{1}{2} (Q_{rr} + Q_{zz}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(Q_{rr} - Q_{zz})^2 + 4 Q_{rz}^2} \quad (26)$$

besitzt. Damit es sich in allen Fällen wirklich um eine periodische Bewegung, das heißt um eine Schwingung handelt, bei der die Nachbarbahnen stets zur Kreisbahn benachbart bleiben, müssen die Frequenzen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  reell sein.  $\alpha^2$ , das nach (26) stets reell ist, muß also eine positive Zahl sein. Dies ergibt mit (18) bis (20) die Bedingungen

$$-(Q_{rr} + Q_{zz}) = \omega^2 (1 + \kappa^2 + \lambda^2) > 0 \quad (27)$$

und

$$(Q_{rr} + Q_{zz})^2 \geq (Q_{rr} - Q_{zz})^2 + 4 Q_{rz}^2$$

oder

$$Q_{rr} Q_{zz} - Q_{rz}^2 > 0. \quad (28)$$

Die erste Bedingung (27) für „stabile“ Bahnen ist sicher erfüllt. Unter der Voraussetzung, daß auch (28) besteht, gibt es also zwei in der quasistatischen Kreisbahn einander senkrecht durchdringende Kreiskegel mit der Feldachse als Achse und den halben Öffnungswinkeln  $\vartheta$  und  $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ , auf denen die Elektronenbahnen fokussiert werden (vergl. Abb. 1). Die Fokussierungswinkel  $\psi_1$  und  $\psi_2$  sind dabei nach (6) durch

$$\psi_1 = \omega \tau_1 = \frac{\pi}{\alpha_1} \omega, \quad \psi_2 = \omega \tau_2 = \frac{\pi}{\alpha_2} \omega \quad (29)$$

gegeben, wobei  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  mit (26) und (18) bis (20) durch

$$\alpha_{1,2}^2 = \frac{\omega^2}{2} (1 + \kappa^2 + \lambda^2) \pm$$

$$\pm \frac{\omega^2}{2} \sqrt{\left[1 + \kappa^2 - \lambda^2 + \frac{2e}{m\omega^2} \left(\varphi_{zz} - \frac{\omega}{2\pi} \Psi_{zz}\right)\right]^2 + 4 \left[\lambda(\kappa - 1) - \frac{e}{m\omega^2} \left(\varphi_{rz} - \frac{\omega}{2\pi} \Psi_{rz}\right)\right]^2} \quad (30)$$

bestimmt sind.



Verschwindet in (13) und (14) das „Koppelungsglied“  $Q_{rz}$ , das heißt ist

$$\frac{e}{m\omega^2} \left( \varphi_{rz} - \frac{\omega}{2\pi} \Psi_{rz} \right) = \lambda(\kappa - 1), \quad (31)$$

so stimmen die Richtungen der Normalschwingungen mit der  $r$ - und  $z$ -Richtung überein, wobei der eine Kegel in einen Zylinder  $r = \text{konst.}$ , der andere in eine achsen-senkrechte Ebene  $z = \text{konst.}$  ausartet. Die beiden Fokussierungswinkel lauten in diesem Falle nach (30)

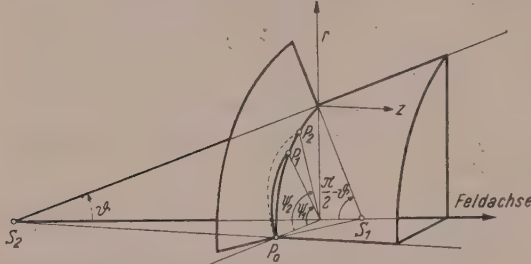


Abb. 1. Die beiden Büschel quasistatischer Elektronenbahnen liegen auf den beiden Kegelflächen mit den Scheiteln  $S_1$  und  $S_2$ . Sie werden im allgemeinen in den verschiedenen Punkten  $P_1$  und  $P_2$  fokussiert. Die Fokussierungswinkel sind mit  $\psi_1$  und  $\psi_2$  bezeichnet worden.

$$\psi_r = \frac{\pi}{\sqrt{1 + \kappa^2 + \frac{e}{m\omega^2} \left( \varphi_{zz} - \frac{\omega}{2\pi} \Psi_{zz} \right)}} \quad (32)$$

und

$$\psi_z = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^2 - \frac{e}{m\omega^2} \left( \varphi_{zz} - \frac{\omega}{2\pi} \Psi_{zz} \right)}} \quad (33)$$

Da in der Regel  $\psi_r$  und  $\psi_z$  verschieden sein werden, hat man im allgemeinen Fall ein astigmatisches Strahlenbündel vor sich.

Die beiden Fokussierungswinkel stimmen überein, wenn in (30) der Wurzel Ausdruck verschwindet. Dies ergibt die beiden Bedingungen

$$Q_{rr} = Q_{zz}, \quad Q_{rz} = 0. \quad (34)$$

Die zweite besagt, daß die Fokussierung in den Flächen  $z = \text{konst.}$  und  $r = \text{konst.}$  erfolgt. Die erste ergibt nach (18) und (20) die Bedingung

$$\frac{2e}{m\omega^2} \left( \varphi_{zz} - \frac{\omega}{2\pi} \Psi_{zz} \right) = \lambda^2 - \kappa^2 - 1. \quad (35)$$

Der Fokussierungswinkel selbst ist in diesem Falle nach (32) und (33) durch

$$\varphi_F = \frac{\pi \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \kappa^2 + \lambda^2}} \quad (36)$$

gegeben. Die Gl. (31) und (35) können daher als die Bedingungen für eine doppelte Richtungs-fokussierung betrachtet werden.

Als Beispiel betrachten wir die Abbildung, welche durch die überlagerten coaxialen Felder eines Zylinderkondensators, eines magnetischen Dipols vom Moment  $\mu$  und eines homogenen Magnetfeldes der Stärke  $B$  vermittelt wird.

Es sei  $r_0$  der Radius einer Zylinderelektrode, deren Spannung  $V_0$  betrage. Wir haben dann die Potentiale

$$\varphi = V_0 - U \ln \frac{r}{r_0}, \quad \Psi = \pi r^2 B + \frac{2\pi r^2 \mu}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (37)$$

Das letzte Glied im Ausdruck für  $\Psi$ , welcher den Kraftfluß des magnetischen Dipols darstellt, bestimmt man entweder direkt auf Grund seiner Definition, indem man die von den beiden Magnetpolen durch die Kreisfläche vom Radius  $r$  hindurchgesandten Kraftflüsse voneinander subtrahiert, oder aus der Feldstärke  $B_z(z, r)$  nach Gl. (1). Gl. (8) oder Gl. (17) ergibt

$$\frac{3\eta\omega r^2 \mu z}{(r^2 + z^2)^{5/2}} = 0, \quad (38)$$

so daß für  $\mu \neq 0$  die Kreisbahn in der Äquatorebene des Dipols liegen muß:  $\bar{z} = 0$ . Setzen wir  $\bar{r} = a$ , so führt Gl. (7) bzw. (16) mit  $\bar{z} = 0$  zu der Bedingung

$$\frac{\eta U_0}{a} + \eta \omega \left( a B - \frac{\mu}{a^2} \right) - \omega^2 a = 0. \quad (39)$$

Gibt man sich den Radius des kreisförmigen Hauptstrahles vor, so folgt für die zugehörige Winkelgeschwindigkeit aus (39)

$$\omega = \frac{\eta}{2} \left( B - \frac{\mu}{a^3} \right) + \sqrt{\frac{\eta^2}{4} \left( B - \frac{\mu}{a^3} \right)^2 + \frac{\eta U_0}{a^2}}. \quad (40)$$

(Das Minuszeichen scheidet aus, da sich für  $U_0 = 0$  auch  $\omega = 0$  ergeben würde.) Nun ist weiter für  $\bar{r} = a$  und  $\bar{z} = 0$

$$\kappa = -\frac{e U_0}{m \omega^2 a^2} = \frac{e}{m \omega} \left( B - \frac{\mu}{a^3} \right) - 1, \quad \lambda = 0 \quad (41)$$

und ferner

$$\varphi_{zz} = 0, \quad \varphi_{rz} = 0, \quad \Psi_{rz} = 0, \quad \Psi_{zz} = -\frac{6\pi\mu}{a^3}, \quad (42)$$

so daß die Bedingung (31) erfüllt ist und die Fokussierung in der achsensenkrechten Ebene  $\bar{z} = 0$  und auf dem Zylinder  $\bar{r} = a$  erfolgt. Für die beiden Fokussierungswinkel erhält man nach (32) und (33)

$$\psi_r = \frac{\pi}{\sqrt{1 + \left( \frac{e U_0}{m \omega^2 a^2} \right)^2 + \frac{3\mu}{a^3} \frac{e}{m \omega}}}, \quad \psi_z = \frac{\pi}{\sqrt{-\frac{3\mu}{a^3} \frac{e}{m \omega}}}, \quad (43)$$

wobei  $\omega$  durch (40) gegeben ist.

Wir betrachten einige wohlbekannte<sup>5</sup> Sonderfälle:

1. Im rein homogenen Magnetfeld ist  $U_0 = 0$  und  $\mu = 0$  zu setzen. In diesem Falle wird

$$\psi_r = \pi = 180^\circ, \quad \psi_z = \infty, \quad (44)$$

das heißt die mit dem Hauptstrahl in der gleichen achsensenkrechten Ebene liegenden Strahlen werden nach einem Winkel von  $180^\circ$  wiedervereinigt, und zwar besteht Fokussierung nur für dieses Strahlenbüschel.

2. Im rein elektrischen Feld des Zylinderkondensators haben wir  $\mu = 0$ ,  $B = 0$  zu setzen. Nach (16) und (17) ist hier  $\kappa = 1$  und  $\lambda = 0$ , so daß wir nach (32) erhalten:

$$\psi_r = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 127^\circ 17'. \quad (45)$$

3. Im Feld des magnetischen Dipols wird nach (40)

$$\omega = -\frac{\eta \mu}{a^3}, \text{ das heißt } \frac{3\mu}{a^3} \frac{e}{m \omega} = -3, \quad (46)$$

so daß wir nach (43)

$$\psi_z = \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 103^\circ 35' \quad (47)$$

erhalten. Die Fokussierung erfolgt daher auf den Zylinderflächen  $\bar{r} = a$ . In achsensenkrechten Ebenen findet keine Fokussierung statt.

4. Die Fokussierungswinkel stimmen in den oben betrachteten kombinierten Feldern überein, wenn die Beziehung

$$1 + \left( \frac{e U_0}{m \omega^2 a^2} \right)^2 = -\frac{6\mu e}{m \omega a^3} \quad (48)$$

<sup>5</sup> Über die Arbeiten wie F. W. Aston, N. F. Barber, W. E. Stephens und A. L. Hughes, A. L. Hughes und McMillen, H. Voges, Hughes und Rojanski sowie W. Henneberg, welche diese Spezialfälle behandeln, siehe die Zitate in der oben angeführten Arbeit von R. Wallauschek.



besteht. Für die Kombination eines magnetischen Dipolfeldes mit einem homogenen Magnetfeld ist nach (40)

$$\omega = \eta \left( B - \frac{\mu}{a^3} \right) \quad (49)$$

und die Bedingung für eine anastigmatische Abbildung lautet:

$$B = - \frac{5 \mu}{a^3}. \quad (50)$$

Der dazugehörige Fokussierungswinkel beträgt

$$\psi = \pi \sqrt{2} = 255^\circ 33'. \quad (51)$$

In der allgemeinen Untersuchung wieder fortfahrend, wollen wir die Bedingung für die doppelte Fokussierung genauer untersuchen. Wir wollen uns im folgenden den Koordinatenanfangspunkt in der Ebene  $z = \bar{z}$  denken, so daß wir  $\bar{z} = 0$  zu setzen haben. Für die weiteren Betrachtungen brauchen wir lediglich die „Potentiale“  $\varphi$  und  $\Psi$  in der unmittelbaren Umgebung der Ebene  $\bar{z} = 0$  durch den Hauptstrahl zu kennen. Wir müssen also die Funktionen um  $z = 0$  entwickeln, wobei wir die Wirbel- und Quellenfreiheit des elektrischen wie auch des magnetischen Feldes in Betracht zu ziehen haben. Zunächst ergibt sich aus (1)

$$B_z = \frac{1}{2 \pi r} \Psi_r. \quad (52)$$

Aus der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = \frac{\partial (r B_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r B_z)}{\partial z} = 0 \quad (53)$$

folgt damit

$$B_r = - \frac{1}{2 \pi r} \Psi_z. \quad (54)$$

Zur Berechnung von  $\varphi(r, z)$  setzen wir

$$\varphi = V(r) + V_1(r) z + V_2(r) z^2 + \dots \quad (55)$$

Wenn wir dies in Gl. (15), welche  $\operatorname{div} \mathfrak{E} = \Delta \varphi = 0$  ausdrückt, einsetzen, erhalten wir

$$\varphi = V(r) + V_1(r) z - \frac{1}{2} \left( V'' + \frac{1}{r} V' \right) z^2 + \dots \quad (56)$$

Wir wollen die Feldkomponenten in der Ebene  $z = 0$ , also

$$E_z(r, 0) = E_z(r), \quad E_r(r, 0) = E_r(r) \quad (57)$$

kurz mit  $E_z$  und  $E_r$  bezeichnen\*. Damit können wir für (56) schreiben:

$$\varphi = V(r) - E_z z - \frac{1}{2} \left( V'' + \frac{1}{r} V' \right) z^2 + \dots \quad (58)$$

Dieselbe Gleichung kann auch zur Bestimmung des Magnetfeldes benutzt werden. Wenn  $W$  nunmehr das magnetische Potential in der Ebene  $z = 0$  bedeutet, erhält man für das skalare magnetische Potential

$$\varphi_m = W(r) - B_z z - \frac{1}{2} \left( W'' + \frac{1}{r} W' \right) z^2 + \dots \quad (59)$$

\*  $V_1(r) = -E_z$  und  $B_z$  (siehe unten) haben die Gestalt  $\text{konst.} \ln r + \text{konst.}$

Hieraus folgt:

$$B_z(r, z) = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial z} = B_z + \left( W'' + \frac{1}{r} W' \right) z + \dots \quad (60)$$

$$B_r(r, z) = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial r} = -W' + B_z' z + \dots \quad (61)$$

Aus (60) ergibt sich die Bedeutung von  $W$  zu

$$W'(r) = -B_r. \quad (62)$$

Damit erhält man

$$B_z(r, z) = B_z - \left( B_r' + \frac{1}{r} B_r \right) z + \dots \quad (63)$$

$$B_r(r, z) = B_r + B_z' z - \dots \quad (64)$$

Aus (1) und (54) folgen die Beziehungen

$$\Psi_r = 2\pi r B_z(r, z), \quad \Psi_z = -2\pi r B_r(r, z), \quad (65)$$

aus denen man mit Rücksicht auf (63), (64) erhält:

$$\Psi_{zz} = -2\pi r B_z + \dots, \quad \varphi_{zz} = -\left( V'' + \frac{1}{r} V' \right) + \dots \quad (66)$$

$$\Psi_{rz} = -2\pi (B_r + r B_r'), \quad \varphi_{rz} = -E_z' z - \dots \quad (67)$$

Durch die Punkte haben wir dabei Glieder angedeutet, die mit Potenzen von  $z$  multipliziert sind und daher für  $z = 0$  verschwinden. Wenn wir daher zur Ebene  $z = 0$  übergehen, erhalten wir endgültig

$$\bar{\varphi}_r = V' = -E_r, \quad \bar{\varphi}_z = -E_z, \quad \bar{\Psi}_r = 2\pi r B_z, \quad \bar{\Psi}_z = -2\pi r B_r; \quad (68)$$

$$\bar{\varphi}_{zz} = E_r' + \frac{1}{r} E_r, \quad \bar{\Psi}_{zz} = -2\pi r B_z', \quad (69)$$

$$\bar{\varphi}_{rz} = 0, \quad \bar{\Psi}_{rz} = -2\pi (B_r + r B_r'). \quad (70)$$

Schreiben wir noch  $\omega r = v_0$ , wobei  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen ist und zugleich die Geschwindigkeit, mit der sie die quasistatische kreisförmige Hauptbahn durchlaufen, so erhalten wir die Beziehungen

$$\kappa = -\frac{\eta E_r r}{v_0^2} = \frac{\eta B_z r}{v_0} - 1, \quad \lambda = -\frac{\eta E_z r}{v_0^2} = -\frac{\eta B_r r}{v_0}. \quad (71)$$

Aus diesen Gleichungen bestimmt man den Radius des Hauptstrahles. Die Bedingungen  $Q_{rz} = 0$  und  $Q_{rr} = Q_{zz}$ , also die Gl. (31) und (35), werden mit Rücksicht auf (69), (70):

$$\lambda(\kappa - 1) = \frac{\eta r}{v_0} (B_r + r B_r'), \quad (72)$$

$$\frac{2\eta r}{v_0^2} (r E_r' + E_r) + \frac{2\eta r^2}{v_0} B_r' = \lambda^2 - \kappa^2 - 1 \quad (73)$$

und der Fokussierungswinkel wird

$$\boxed{\psi_F = \frac{v_0^2 \pi \sqrt{2}}{\sqrt{v_0^4 + \eta^2 r^2 E^2}}.} \quad (74)$$



Hierbei ist  $E$  der Betrag der elektrischen Feldstärke  $E = \sqrt{E_r^2 + E_z^2}$  am Hauptkreis. Die Bedingung (71) für den kreisförmigen Hauptstrahl des Elektronenbündels ist anschaulich unmittelbar klar. Denn schreibt man sie in der Gestalt

$$\eta (E_r + v_0 B_z) = \frac{v_0^2}{r}, \quad \eta (E_z - v_0 B_r) = 0, \quad (75)$$

so wird dadurch das Verschwinden der gesamten Normalbeschleunigung bzw. der Beschleunigung in axialer Richtung zum Ausdruck gebracht. Denkt man sich  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{B}$  längs des Hauptkreises gegeben, so bestimmen die beiden Gl. (72) und (73) die für eine anastigmatische Abbildung notwendigen Feldänderungen (Feldgradienten) an diesem Hauptkreis. Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{dB_r}{dr} &= \frac{v_0}{\eta r^2} \lambda (\kappa - 1) - \frac{1}{r} B_r, \\ \frac{dE_r}{dr} + v_0 \frac{dB_z}{dr} &= \frac{v_0^2}{2\eta r^2} (\lambda^2 - \kappa^2 - 1) - \frac{1}{r} E_r. \end{aligned} \quad (76)$$

Im rein magnetischen Feld ist  $\lambda = \kappa = 0$ . Der Fokussierungswinkel beträgt daher stets

$$\psi_F = \pi \sqrt{2} = 254^\circ 33' \quad (77)$$

Weiter folgt aus (71)

$$B_r = 0, \quad \eta B_z r = v_0 \quad (78)$$

und aus (76)

$$\frac{dB_z}{dr} = - \frac{v_0}{2\eta r^2}. \quad (79)$$

Mit Rücksicht auf (78), das heißt

$$\frac{v_0}{2\eta r^2} = - \frac{1}{2} B_z \frac{1}{r} \quad (80)$$

gilt also auch

$$\frac{dB_z}{B_z} = - \frac{1}{2} \frac{dr}{r} \quad \text{oder} \quad B_z \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (81)$$

in der Nähe des Hauptstrahles.  $B_z(r)$  braucht aber keineswegs überall wie  $r^{-\frac{1}{2}}$  abfallen, sondern es genügt in der Umgebung des Hauptstrahles (79) zu erfüllen. Analog folgt aus (76) für das rein elektrische Feld

$$\varphi_F = \pi \quad \text{und} \quad V_{(r)} \sim \frac{1}{r}.$$

Wenn auch die rotationssymmetrischen Felder dadurch besonders ausgezeichnet sind, daß in ihnen die quasistatischen Bahnen sehr leicht als Kreisbahnen bestimmt werden können, so sind doch die vorhergehenden allgemeinen Überlegungen nicht auf solche Felder beschränkt. Man kann die doppelte Fokussierung durch quasistatische Elektronenbahnen in beliebigen Abbildungsfeldern untersuchen. Hierbei wird man zweckmäßigerweise von den allgemeinen elektronenoptischen Ansätzen ausgehen, wie sie in den schönen Arbeiten von M. Cotte<sup>6</sup> und unabhängig davon von G. Wendt<sup>7</sup> aufgestellt worden sind.

<sup>6</sup> M. Cotte: Ann. Physique **10**, 333 (1938). Vergleiche z. B. P. Hubert l. c.

<sup>7</sup> G. Wendt: Z. Physik **120**, 720 (1943).

## Zu L. Föppls Theorie der rollenden Reibung\*.

Von G. Heinrich, Wien.

Mit 6 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Nach einem gedrängten Überblick über die physikalischen Grundlagen der Föpplschen Theorie der rollenden Reibung werden die Föpplschen Ansätze für die Normaldruckverteilung kritisch betrachtet. Es wird gezeigt, daß die Hertzsche Berührungsbedingung durch die Gleichungen Föppls nicht erfüllt wird. Bei gleichen elastischen Konstanten der berührenden Teile ist nur eine Hertzsche Druckverteilung möglich. Bei Gültigkeit des Coulombschen Reibungsgesetzes folgt daraus die Schubverteilung im Gleitgebiet und aus ihr mit Hilfe der Föpplschen Haftbedingung die Schubverteilung im Haftgebiet. Schub- und Normaldruckverteilung werden formelmäßig wesentlich einfacher als bei Föppl. Eine Übertragung größerer Tangentialkräfte, als sie dem angenommenen Reibungsgesetz entsprächen, die nach Föppl möglich wäre, ist hier ausgeschlossen.

Hierauf wird der Schlupf berechnet und mit Versuchen von G. Sachs verglichen. Die berechneten Werte sind durchwegs kleiner als die gemessenen. Dies gilt auch für die aus Föppls Theorie folgenden Schlupfwerte, wenn man den Schlupf korrekt berechnet. Die Versuche sprechen, zumindest bis etwa 70% der maximalen Tangentialkraft, für eine parabolische Abhängigkeit des Schlupfes von der Tangentialkraft in Übereinstimmung mit der Theorie, während diese Abhängigkeit nach Föppl linear sein müßte.

Zuletzt wird die Arbeit der rollenden Reibung ermittelt. Eine Erweiterung der Theorie auf den Fall verschiedener elastischer Konstanten der berührenden Teile wird einer späteren Arbeit vorbehalten.

**Summary.** After a condensed general view over the physical elements of the Föppl theory about the rolling friction, the Föppl preliminary statements about the perpendicular pressure distribution are critically discussed. The author proves that the contact condition by Hertz is not met by the Föppl equations. In case of equal elastic constants of the contacting parts only the Hertz pressure distribution is possible. If the Coulomb friction law is valid, from this one is deduced the distribution of the transverse tension in the sliding stage and further on, departing from that one and considering the Föppl clinging condition, the distribution in the clinging stage. The formulae for the distribution of clinging stress and of perpendicular pressure are really more simplified than with Föppl. The transmission of greater tangential power, than correspond to the assumed friction law, which is possible in the Föppl case, is excluded in this case.

Further the slip is calculated and compared with the results of trials made by G. Sachs. The calculated values are throughout smaller than the measured ones. The same statement is made for the values of slipping which arise from the Föppl theory, provided that the slip is correctly calculated. The trials aim at a parabolic slip dependence from the tangential power and conform with the theory, whereas this dependence should be linear after Föppl.

Finally the power of the rolling friction is calculated. The extension of this theory to the case of varying elastic constants of the contacting parts is postponed to a forthcoming article.

**Résumé.** Après une vue générale mais concise sur les bases physiques de la théorie de Föppl du frottement roulant sont critiquées les équations de Föppl pour la répartition de la pression normale. Il est montré que la condition de contact de Hertz n'est pas remplie par les équations de Föppl. En cas de constantes égales et élastiques des parties en contact, uniquement la répartition des forces d'après Hertz est possible. Si la loi de friction de Coulomb est valable, il s'en suit la répartition de la poussée dans le domaine du glissement, et de plus, à l'aide de la condition de l'adhérence de Föppl, la répartition de la poussée dans le domaine de l'adhérence. La répartition de la poussée et de la pression normale deviennent sensiblement plus simples en formules que selon Föppl. La transmission de forces tangentielles plus grandes que celles qui correspondent à la loi supposée de frottement, possible selon Föppl, est ici exclue.

Ensuite, le glissement est calculé et comparé avec les résultats des essais exécutés par G. Sachs. Les valeurs calculées sont partout plus petites que les valeurs mesurées. Ceci est valable aussi pour les valeurs de glissement émanant de la théorie de Föppl pourvu que le glissement soit correctement calculé. Les essais soutiennent, au moins jusqu'à 70% de la force tangentielle maxima, la dépendance parabolique du glissement de la force tangentielle ce qui correspond à la théorie, tandis que cette dépendance, selon Föppl, devrait être linéaire.

Enfin le travail du frottement roulant est recherché. Pour élargir la théorie, un article ultérieur traitera du cas de constantes élastiques variables des parties en contact.

\* Herrn Prof. Dr. E. Melan zum 60. Geburtstag gewidmet.



## 1. Einleitung.

L. Föppl gibt in seiner Schrift „Die strenge Lösung für die rollende Reibung“<sup>1</sup> erstmalig die exakten Grundlagen für eine elastizitätstheoretische Behandlung des Problems der rollenden Reibung zwischen Rad und Schiene, wobei bleibende Formänderungen ausgeschlossen bleiben. Außerdem wird vorausgesetzt, daß Rad und Schiene aus dem gleichen Werkstoff bestehen, so daß ihre elastischen Konstanten übereinstimmen.

Es sollen zunächst die physikalischen Grundlagen der Föppl'schen Theorie kurz skizziert werden. Es wird angenommen, daß sich das ganze Berührungsgebiet zwischen Rad und Schiene im allgemeinen in zwei Teilgebiete zerlegen läßt, und zwar in ein vorderes Haftgebiet und in ein anschließendes Gleitgebiet. Im Haftgebiet findet keine Relativbewegung zwischen den berührenden Teilen statt, was eine Bedingung für die Formänderung der im Kontakt stehenden Randfasern liefert. Im Gleitgebiet herrschen analoge Verhältnisse wie im Grenzfall vollkommenen Schlüpfens längs der ganzen Berührungsfläche<sup>2</sup>. Hier besteht nämlich, wenn man die Gültigkeit des Coulombschen Reibungsgesetzes voraussetzt, die Hertz'sche Druckverteilung, die sich, zufolge des Coulombschen Gesetzes, auch auf die Schubbelastung überträgt.

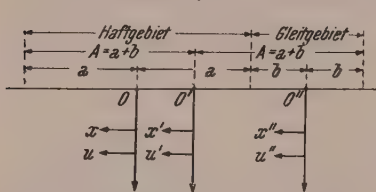


Abb. 1. Die verwendeten Koordinatensysteme.

Die Elastizitätstheorie liefert den Zusammenhang zwischen der Schubbelastung der Berührungsfläche und der tangentiellen Spannung  $\sigma_t$  in der Randfaser, die ihrerseits die Deformation und somit die Relativbewegung der berührenden Teile bedingt. Eine solche wird im Haftgebiet nur vermieden, wenn  $\sigma_t$  hier einen konstanten Wert annimmt. Eine überlagerte Normaldruckverteilung ändert, wenigstens solange Rad und Schiene aus demselben Werkstoff bestehen, nichts an der Haftbedingung, da sie in beiden einander berührenden Randfasern eine nach Größe und Vorzeichen gleiche zusätzliche Deformation erzeugt.

Föppl macht nun für die Schubspannungsverteilung im Gleit- und Haftgebiet mathematische Ansätze, die eine Reihe von unbestimmten Koeffizienten enthalten. Durch Erfüllung der Haftbedingung und gewisser Stetigkeitsforderungen lassen sich diese Koeffizienten berechnen. Zwischen dem Verhältnis  $\alpha$  des Schlupfgebietes zum gesamten Berührungsgebiet und der Tangentialspannung  $\sigma_0$  in der Randfaser des Haftgebietes erhält man jedoch nur eine einzige Gleichung. Zur Beseitigung dieser Unbestimmtheit muß man noch auf die Druckverteilung zwischen Rad und Schiene eingehen. Für diese macht Föppl formell die gleichen Ansätze wie für die Tangentialspannungen. Für die Ermittlung der Koeffizienten dienen die Bedingungen, daß im Gleitgebiet das Coulombsche Reibungsgesetz gelten soll und daß die Normalspannungen überall stetig sein müssen. Auf diese Weise gelingt es, alle noch unbekannten Größen durch die als gegeben angesehenen Größen der Normalkraft  $N$ , der Tangentialkraft  $T$  und des Moments der Normalkraft  $M$  in bezug auf die Mitte der Berührungslinie auszudrücken.

Zur mathematischen Formulierung benützt Föppl die in Abb. 1 dargestellten Koordinatensysteme. Nach [F] Gl. (31) und Gl. (34) gilt für die Schubspannungsverteilung  $q(u)$  im Haftgebiet:

$$q(u) = \frac{c_0 + c_1 u + c_2 u^2}{2 \sqrt{a^2 - u^2}} + \frac{c_0' + c_1' (u + b) + c_2' (u + b)^2}{2 \sqrt{A^2 - (u + b)^2}} \quad (1)$$

<sup>1</sup> Erschienen im Leibniz-Verlag, München, 1947. Im folgenden wird diese Arbeit kurz mit [F] bezeichnet.

<sup>2</sup> Vgl. L. Föppl: Beanspruchung von Schiene und Rad beim Anfahren und Bremsen. Forsch. Gebiete Ingenieurwes. 7. Jg. 141—147 (1936).

und für die Schubspannungsverteilung  $q'(u)$  im Gleitgebiet:

$$q'(u) = \frac{c_0' + c_1'(u+b) + c_2'(u+b)^2}{2\sqrt{A^2 - (u+b)^2}} + \frac{c_0''}{2b^2} \sqrt{b^2 - (u+A)^2}. \quad (2)$$

In sinngemäßer Erweiterung von [F] Gl. (8) ergibt sich daraus die Randspannung  $\sigma_t$  zu:

$$\sigma_t = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_{-a}^{+a} \frac{q(u) du}{x-u} + \int_{-(A+b)}^{-a} \frac{q'(u) du}{x-u} \right\}. \quad (3)$$

$\sigma_t$  muß im Haftgebiet einen konstanten Wert annehmen.

Zur Berechnung der in Gl. (3) auszuführenden bestimmten Integrale dienen die Formeln [F] Gl. (5) und [F] Gl. (5a):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{(c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3) du}{(x-u) \sqrt{a^2 - u^2}} = \\ & = \begin{cases} -c_1 - c_2 x - c_3 \left( \frac{a^2}{2} + x^2 \right) \dots \text{für } x^2 < a^2 \\ -c_1 - c_2 x - c_3 \left( \frac{a^2}{2} + x^2 \right) + \frac{x}{|x|} \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3}{\sqrt{x^2 - a^2}} \dots \text{für } x^2 > a^2 \end{cases} \quad (4) \end{aligned}$$

und

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{x-u} du = \begin{cases} x \dots \text{für } x^2 \leq a^2, \\ x - \frac{x}{|x|} \sqrt{x^2 - a^2} \dots \text{für } x^2 \geq a^2. \end{cases} \quad (5)$$

Bei Verwendung der Gl. (4) und (5) läßt sich die Integration in Gl. (3) leicht durchführen. Im Haftgebiet muß  $\sigma_t = \sigma_0 = \text{const.}$  sein, im Gleitgebiet soll sich die Randspannung nach Föppl von  $+\sigma_0$  auf  $-\sigma_0$  ändern. Damit lassen sich alle Koeffizienten in (1) und (2) durch die Unbekannten  $\sigma_0$ ,  $A$  und  $\alpha = b/A$  ausdrücken, wenn man noch gewisse Stetigkeitsforderungen erfüllt.  $A$  errechnet dabei Föppl aus der Hertzischen Gleichung zu:

$$A = 2 \sqrt{\frac{2(m^2 - 1) N r}{\pi E m^2}}. \quad (6)$$

worin  $m$  die Poissonsche Zahl,  $E$  der Elastizitätsmodul,  $N$  der auf die axiale Länge eins bezogene gesamte Normaldruck und  $r$  der Krümmungsradius der Lauffläche bedeutet.

Durch Integration der Schubspannung über das gesamte Berührungsgebiet erhält man die Tangentialkraft  $T$ , bezogen auf die axiale Länge eins, die als gegeben betrachtet werden kann. Dies liefert die erwähnte Beziehung zwischen  $\sigma_0$  und  $\alpha$ .

Um noch eine zweite Beziehung zwischen  $\sigma_0$  und  $\alpha$  zu erhalten, muß die Normaldruckverteilung ermittelt werden. Diese setzt Föppl ganz analog zu (1) und (2) an. ([F] Gl. (36a) und (36b)). Die Normaldruckverteilung  $p(u)$  im Haftgebiet wird:

$$p(u) = \frac{C_0 + C_1 u + C_2 u^2}{2\sqrt{a^2 - u^2}} + \frac{C_0' + C_1'(u+b) + C_2'(u+b)^2}{2\sqrt{A^2 - (u+b)^2}} \quad (7)$$

und  $p'(u)$  im Gleitgebiet:

$$p'(u) = \frac{C_0' + C_1'(u+b) + C_2'(u+b)^2}{2\sqrt{A^2 - (u+b)^2}} + \frac{C_0''}{2b^2} \sqrt{b^2 - (u+A)^2}. \quad (8)$$

Da im Gleitgebiet das Coulombsche Reibungsgesetz gelten soll, lassen sich die Koeffizienten  $C_0'$ ,  $C_1'$ ,  $C_2'$  und  $C_0''$  durch die entsprechenden Koeffizienten  $c_0'$ ,  $c_1'$ ,  $c_2'$  und  $c_0''$  ausdrücken. Ferner muß der Normaldruck überall stetig sein und sein Integral über die Berührungsfläche muß dem gegebenen Normaldruck  $N$  gleich sein. Betrachtet man schließlich auch das Moment  $M$  des Normaldruckes in bezug auf den



Mittelpunkt  $O'$  des Berührungsgebietes als gegeben, so lassen sich alle Unbekannten durch gegebene Größen ausdrücken.

Von den Folgerungen, die sich aus der Föppl'schen Lösung ergeben, sei nur erwähnt, daß  $\alpha = b/A$  bei von Null verschiedener Tangentialkraft stets den Wert 0.64 annehmen muß. Außerdem ist die maximale Tangentialkraft  $T_{\max}$ , die übertragen werden kann:  $T_{\max} = 1.136 \mu_0 N$ , worin  $\mu_0$  den Coulombschen Reibungskoeffizienten bedeutet. Sie ist um 13.6% größer als bei gleitender Reibung. Es werden demnach in diesem Fall im Haftgebiet größere Schubspannungen übertragen, als es das Coulombsche Reibungsgesetz zuläßt. Die Frage nach der Übertragbarkeit so großer Schubspannungen im Haftgebiet sucht Föppl durch die Annahme von Schub-Dipolen zu erklären. Danach würden die überschüssigen Schubspannungen in zwei gleiche, am Anfang und am Ende des Haftgebietes wirkende Einzelkräfte umgesetzt. Eine solche Aufteilung der Schubkraft wird mathematisch durch eine partielle Integration des Integrals nahegelegt, das die Tangentialspannung in der Randfaser darstellt.

## 2. Die Hertz'sche Berührungsbedingung.

Bei kritischer Betrachtung der Föppl'schen Ableitung fällt vor allem auf, daß die Normaldruckverteilung im Haftgebiet nicht aus einem physikalischen Kriterium entwickelt, sondern in formaler Analogie zur Schubspannungsverteilung angesetzt wird. Ein solches physikalisches Kriterium existiert jedoch und darf nicht ignoriert werden. Es muß nämlich im gesamten Gebiet, in dem eine Kraftübertragung zwischen Rad und Schiene stattfindet, die Deformation von solcher Art sein, daß eine durchlaufende Berührung der beiden Körper längs einer gemeinsamen Drucklinie möglich wird. Da H. Hertz aus diesem physikalischen Kriterium für den Sonderfall, daß zwei Zylinder längs einer Erzeugenden durch einfache Druckkraft aufeinandergepreßt werden, die Normaldruckverteilung ableitet, soll das Kriterium als Hertz'sche Berührungsbedingung bezeichnet werden.

Es soll nun untersucht werden, ob die von Föppl gefundene Normal- und Schubspannungsverteilung mit der Hertz'schen Berührungsbedingung verträglich ist. Dazu müssen wir die Deformation von Rad und Schiene im Berührungsgebiet berechnen. Wir begnügen uns dabei, wie es Föppl bei seiner ganzen Untersuchung tut, mit einer Theorie erster Ordnung. Dann ist das Problem linear und wir können die Deformation durch Überlagerung der von der Schubspannungsverteilung und der Normaldruckverteilung allein herrührenden Anteile erhalten.

Um die Deformation zu erhalten, die von den Schubspannungen allein herrührt, betrachten wir zunächst die durch eine Einzellast  $Q$  parallel zum Rand belastete Halbebene, die im Ursprung  $O$  eines rechtwinkligen Koordinatensystems parallel zur  $x$ -Achse wirken soll. Die  $y$ -Achse weise ins Innere der Halbebene. Die dadurch erzeugten Spannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  ergeben sich zu<sup>3</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{2Q}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ \sigma_x &= -\frac{2Q}{\pi} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Die Dehnung  $\varepsilon_y$  in Richtung der  $y$ -Achse ist dann:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{E'} \left( \sigma_y - \frac{1}{m} \sigma_x \right). \quad (10)$$

$\eta$  ist darin die Verschiebung des Randes in Richtung der  $y$ -Achse,  $E'$  der Elastizitätsmodul und  $m$  die Poissonsche Zahl.

<sup>3</sup> Vgl. L. Föppl: Drang und Zwang, Bd. III, S. 29. München. 1947.

Aus (10) erhält man, bei Beachtung von (9):

$$\eta = \frac{1}{E'} \int_0^{\infty} \left( \sigma_y - \frac{1}{m} \sigma_x \right) dy = -\frac{Q}{2E'} \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \dots \dots \text{für } x > 0 \quad (11a)$$

und

$$\eta = +\frac{Q}{2E'} \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \dots \dots \text{für } x < 0. \quad (11b)$$

Der Rand bleibt also gerade und weist an der Stelle  $x = 0$  einen Sprung  $(\Delta\eta)_{x=0}$  vom Betrag:

$$(\Delta\eta)_{x=0} = -\frac{Q}{E'} \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \quad (12)$$

auf.

Ist  $Q$  nicht auf einen Punkt konzentriert, sondern längs einer Linie verteilt, und ist  $q(x)$  die Schubbelastung pro Längeneinheit, so ist die durch die Kraft  $q(x) \cdot \Delta x$  verursachte Änderung

$$\Delta\eta = -\frac{q(x) \cdot \Delta x}{E'} \left( 1 - \frac{1}{m} \right)$$

oder, nach Ausführung des Grenzüberganges  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{q(x)}{E'} \left( 1 - \frac{1}{m} \right). \quad (13)$$

Berühren sich nun zwei schwach gekrümmte, achsenparallele zylindrische Körper 1 und 2 längs einer gemeinsamen Drucklinie und werden gleichzeitig auch Schubspannungen übertragen, so gelten für die von den Schubspannungen allein herrührenden Deformationen  $\eta_1$  und  $\eta_2$  (jede nach dem Innern des zugehörigen Körpers positiv gezählt), wenn die Schubspannungen auf den Körper 1 in Richtung der gemeinsamen  $x$ -Achse wirkt, die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} &= -\frac{q(x)}{E_1'} \left( 1 - \frac{1}{m_1} \right), \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial x} &= +\frac{q(x)}{E_2'} \left( 1 - \frac{1}{m_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Bei Gleichheit der elastischen Konstanten folgt aus (14):

$$\frac{\partial}{\partial x} (\eta_1 + \eta_2) = 0. \quad (14a)$$

Gl. (14a) bedeutet aber, daß bei Gleichheit der elastischen Konstanten die Schubspannungen die Hertz'sche Berührungsbedingung nicht beeinflussen. Wir brauchen in diesem Falle nur die Normalspannungen zu berücksichtigen.

Wir überprüfen nun die Hertz'sche Berührungsbedingung für die in Gl. (7) und (8) angegebenen Normaldrücke. In Abb. 2 sind zwei Räder mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$  vor ihrer Deformation gezeichnet. Wir setzen später  $r_1 = r$  und  $r_2 = \infty$ , um den Fall von Rad und Schiene zu erhalten. Die Punkte  $A_1$  und  $A_2$  sollen sich nach erfolgter Deformation berühren. Wir wollen nicht von vornherein voraussetzen, daß der Mittelpunkt  $O'$  des Berührungsgebietes (vgl. Abb. 1) mit dem geometrischen Berührungspunkt der beiden Kreise zusammenfällt. Den Abstand  $x_0$  dieser beiden Punkte führen wir als unbekannten Parameter ein.

Die Kreismittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$  sollen nun durch Druckerzeugung die elastische Annäherung  $A$  erfahren. Die sich berührenden Punkte  $A_1$  und  $A_2$  erleiden dabei die elastischen Verschiebungen  $\eta_1$  und  $\eta_2$ . Dann besteht die Beziehung:

$$A = A_1 A_2 + \eta_1 + \eta_2. \quad (15)$$

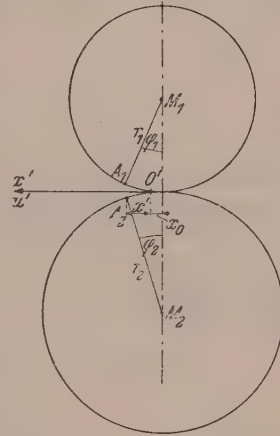


Abb. 2. Zur Ableitung der Hertz'schen Berührungsbedingung.



Für die Strecke  $A_1 A_2$  gilt in erster Näherung:

$$A_1 A_2 = \frac{1}{2} (x_0 + x')^2 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (15a)$$

Die Ableitung von (15) nach  $x'$  ergibt, bei Beachtung von (15a):

$$\frac{\partial A}{\partial x'} = (x_0 + x') \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x'} (\eta_1 + \eta_2) = 0. \quad (16)$$

Herrscht längs des Randes einer unendlichen Halbebene im Intervall von  $x' = -A$  bis  $x' = +A$  die Normaldruckverteilung  $p(x')$ , so gilt allgemein<sup>4</sup>:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x'} = -\frac{2}{\pi E'} \int_{-A}^{+A} \frac{p(u') du'}{x' - u'}. \quad (17)$$

Man kann nun (17) in (16) einführen und erhält bei Beachtung der Föppl'schen Normaldruckverteilungen (7) und (8) und bei Berücksichtigung der aus Abb. 1 folgenden Koordinatentransformation:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + b, \\ u' &= u + b \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

die Beziehung:

$$\frac{1}{r} (x_0 + x') = \frac{4}{\pi E'} \left\{ \int_{-A}^{+A} \frac{(C_0' + C_1' u') du'}{2 \sqrt{A^2 - u'^2} (x' - u')} + \int_{-a}^{+a} \frac{(C_0 + C_1 u + C_2 u^2) du}{2 \sqrt{a^2 - u^2} [(x' - b) - u]} \right\}. \quad (19)$$

Hierin wurde  $E_1' = E_2' = E'$ ,  $r_1 = r$  und  $r_2 = \infty$  gesetzt; ferner wurde das Glied mit  $C_0''$  aus (18) weggelassen, da nach [F] Gl. (62) und (37)  $C_0'' = 0$  zu setzen ist.

Gl. (19) müßte nun im gesamten Berührungsgebiet erfüllt sein. Die in (19) erscheinenden Integrale lassen sich aber mittels der Formel (4) leicht ausrechnen. Man erhält bei Beachtung von (18):

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} (x_0 + b + x) &= -\frac{2}{E'} (C_1' + C_1 + C_2 x) \dots \text{für } x^2 < a^2 \text{ (Haftgebiet),} \\ \frac{1}{r} (x_0 + b + x) &= \frac{2}{E'} \left( -C_1' - C_1 - C_2 x + \frac{x}{|x|} \frac{C_0 + C_1 x + C_2 x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right) \\ &\quad \text{für } -a > x > -(A + b) \text{ (Gleitgebiet).} \end{aligned}$$

Man sieht, im Haftgebiet ist die Berührungsbedingung wenigstens formell erfüllt, es ergibt sich jedoch für  $C_2$  ein anderer Wert, als ihn Föppl angibt. Im Gleitgebiet ist nicht einmal die formelle Erfüllung gewährleistet, da nach [F] Gl. (45)  $C_0$ ,  $C_1$  und  $C_2$  im allgemeinen von Null verschieden sind.

Da die Hertz'sche Berührungsbedingung nicht erfüllt ist, muß ein anderer Aufbau der Theorie versucht werden.

### 3. Neuer Aufbau der Theorie der rollenden Reibung.

Da die Hertz'sche Berührungsbedingung für den Fall gleicher elastischer Konstanten durch die Schubspannungsverteilung im Berührungsgebiet nicht beeinflusst wird, geht man am besten von ihr aus. Wir suchen also eine Normaldruckverteilung  $p'(x')$  im Berührungsgebiet, die daselbst gemäß (16) und (17) der Integralgleichung:

$$(x_0 + x') \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{4}{\pi E'} \int_{-A}^{+A} \frac{p'(u') du'}{x' - u'} \dots \text{für } x'^2 \leq A^2 \quad (20)$$

<sup>4</sup> Drang und Zwang, I. c. S. 62.

genügt.  $x_0$  ist hierin ein unbekannter Parameter, der noch den Bedingungen des Problems angepaßt werden muß.

Aus Gl. (4) erkennt man, daß bei passender Wahl der Koeffizienten der Ausdruck:

$$p'(x') = \frac{C_0' + C_1' x' + C_2' x'^2}{\sqrt{A^2 - x'^2}} \quad (21)$$

eine Lösung der Integralgleichung (20) darstellt. Führt man (21) in (20) ein, so erhält man:

$$(x_0 + x') \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = - \frac{4}{E'} (C_1' + C_2' x') \dots \text{für } x'^2 \leq A^2. \quad (22)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man:

$$\left. \begin{aligned} C_1' &= - \frac{E'}{4} x_0 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \\ C_2' &= - \frac{E'}{4} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Für  $C_0'$  liefert die Integralgleichung keine Determination. Wir müssen aber fordern, daß  $p(x')$  nirgends unendlich große Werte annimmt. Da der Nenner in Gl. (21) für die Werte  $x' = +A$  und  $x' = -A$  verschwindet, muß dort auch der Zähler Null werden. Es gelten also die Gleichungen:

$$\begin{aligned} C_0' + \frac{E'}{4} x_0 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) A - \frac{E'}{4} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) A^2 &= 0, \\ C_0' - \frac{E'}{4} x_0 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) A - \frac{E'}{4} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) A^2 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort:

$$x_0 = 0$$

und

$$C_0' = \frac{E'}{4} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) A^2.$$

Damit geht aber Gl. (21) in die gewöhnliche Hertzsche Druckverteilung:

$$p'(u') = \frac{E'}{4} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \sqrt{A^2 - u'^2} \dots \text{für } u'^2 \leq A^2 \quad (24)$$

über, die für das ganze Berührungsgebiet gilt. Da im Bereich einer Elastizitätstheorie erster Ordnung für einen gegebenen Belastungsfall nur ein einziges Gleichgewicht existieren kann, stellt Gl. (24) zugleich die einzig mögliche Lösung für die Normaldruckverteilung dar.

Geht man vom ebenen Spannungszustand zum ebenen Verzerrungszustand über, so hat man:

$$E' = E \frac{m^2}{m^2 - 1} \quad (25)$$

zu setzen<sup>5</sup>, worin  $E$  den wirklichen Elastizitätsmodul bedeutet, dann steht man in genauer Übereinstimmung mit der von Hertz abgeleiteten Formel.

Ist  $N = \int_{-A}^{+A} p'(x') dx'$  die gesamte Normalkraft, so folgt aus (24):

$$N = \frac{E' \pi}{8} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) A^2. \quad (26)$$

Aus (26) und (25) folgt schließlich die bekannte Hertzsche Beziehung

$$A = 2 \sqrt{\frac{2 N (m^2 - 1)}{\pi E \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) m^2}} \quad (26a)$$

<sup>5</sup> Drang und Zwang, I. c. S. 70.



Wenn wir die Gültigkeit des Coulombschen Reibungsgesetzes voraussetzen, dann liegt mit der Normaldruckverteilung auch die Schubverteilung  $q'(u')$  im Gleitgebiet fest:

$$q'(u') = \frac{\mu_0 E'}{4} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \sqrt{A^2 - u'^2} \dots \text{für } -A \leq u' \leq b - a \quad (27)$$

gültig für das treibende Rad; beim getriebenen Rad ist das negative Zeichen zu nehmen.

Die Schubverteilung  $q(u)$  im Haftgebiet setzen wir:

$$q(u) = q'(u') + q(u) \quad \text{für } u^2 \leq a^2 \quad (28)$$

mit  $q(u)$  als zu suchende Funktion. Sie wird durch die Föppl'sche Forderung bestimmt, daß die durch die Schubspannungsverteilung allein verursachte Randspannung  $\sigma_t$  im Haftgebiet konstant sein soll. Man erhält also, in sinngemäßer Anwendung von Gl. (3):

$$\sigma_t = + \frac{2}{\pi} \left\{ \int_{-A}^{+A} \frac{\mu_0 E'}{4} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \frac{\sqrt{A^2 - u'^2}}{x' - u'} du' + \int_a^{-a} \frac{q(u) du}{x - u} \right\} = \sigma_0 \dots \text{für } u^2 \leq a^2. \quad (29)$$

Daraus ergibt sich bei Beachtung von Gl. (5) für  $q(u)$  die Integralgleichung:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{q(u) du}{x - u} = + \frac{1}{2} \sigma_0 - \frac{\mu_0 E'}{4} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) x' \dots \text{für } u^2 \leq a^2. \quad (29a)$$

Aus Gl. (4) ersieht man, daß bei passender Koeffizientenwahl:

$$q(x) = \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (30)$$

eine Lösung von (29a) darstellt. Durch Einsetzen in (29a) ergibt sich, bei Beachtung von (18):

$$-c_1 - c_2 x = -\frac{\mu_0 E'}{4} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) (x + b) + \frac{1}{2} \sigma_0 \dots \text{für } x^2 \leq a^2. \quad (31)$$

Durch Koeffizientenvergleich findet man:

$$c_2 = \frac{\mu_0 E'}{4} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (32a)$$

und

$$c_1 = \frac{\mu_0 E'}{4} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) b - \frac{1}{2} \sigma_0. \quad (32b)$$

Da aber auch die Schubspannung nirgends unendlich werden kann, muß für  $x = \pm a$  der Zähler von (30) verschwinden. Dies führt, analog wie bei der Normaldruckverteilung, auf:

$$c_1 = 0, \quad (33a)$$

$$c_0 = -c_2 a^2 = -\frac{\mu_0 E'}{4} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) a^2. \quad (33b)$$

Aus (28), (27), (30), (32a), (33a) und (33b) ergibt sich dann die Schubverteilung im Haftgebiet des treibenden Rades:

$$q(u) = \frac{\mu_0 E'}{4} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) (\sqrt{A^2 - u'^2} - \sqrt{a^2 - u^2}) \dots \text{für } u^2 \leq a^2. \quad (34)$$

Beim getriebenen Rad ist wieder das negative Zeichen zu nehmen. Da es nur eine einzige Lösung gibt, ist Gl. (34) die gesuchte Lösung der Integralgleichung (29a).

Die Randspannung  $\sigma_0$  im Haftgebiet unter dem Einfluß der Schubspannungen folgt aus (32b) und (33a) zu:

$$\sigma_0 = \pm \frac{\mu_0 E'}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) b, \quad (35)$$

wobei das obere Vorzeichen für das getriebene, das untere für das treibende Rad gilt.

Wir denken uns den gesamten Normaldruck  $N$  und die gesamte Tangentialkraft  $T$  als gegeben. Dann ist  $A$  durch Gl. (26) bestimmt, worin  $E'$  durch die rechte Seite von Gl. (25) zu ersetzen ist, um den Übergang vom ebenen Spannungszustand zum ebenen Verzerrungszustand zu vollziehen. Die einzige Unbekannte ist dann  $a$  bzw.  $b = A - a$ , das noch durch  $T$  ausgedrückt werden muß. Aus (27) und (34) ergibt sich:

$$T = \frac{\mu_0 E'}{4} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \left( \int_{-A}^{+A} \sqrt{A^2 - u'^2} du' - \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - u^2} du \right).$$

Die Integration liefert:

$$T = \mu_0 \frac{E' A^2 \pi}{8} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \left[ 1 - \left( \frac{a}{A} \right)^2 \right]. \quad (36)$$

Setzen wir mit Föppl:

$$b/A = \alpha, \quad (37)$$

dann schreibt sich (36):

$$T = \mu_0 \frac{E' A^2 \pi}{8} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \alpha (2 - \alpha). \quad (36a)$$

Aus (26) und (36a) ergibt sich:

$$T/N = \mu = \mu_0 \alpha (2 - \alpha). \quad (38)$$

$\mu$  wird von Föppl als Beiwert der Haftreibung bezeichnet. Aus (38) läßt sich  $\alpha$  leicht ermitteln. Man erhält den einfachen Ausdruck:

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - \frac{\mu}{\mu_0}}. \quad (39)$$

Damit sind alle unbekannten Größen durch bekannte ausgedrückt.

#### 4. Diskussion der erzielten Ergebnisse.

Die durch Gl. (27) und (34) festgelegte Schubspannungsverteilung wurde in Abb. 3 über dem Berührungsgebiet aufgetragen. Der Maßstab wurde so gewählt, daß eine Darstellung durch Kreise möglich wird. Der schraffierte Teil zeigt die Schubspannungsverteilung.

Solange keine Tangentialkraft übertragen wird ( $\mu = 0$ ), fallen die beiden Kreise nach Gl. (39) und (37) zusammen und die Schubspannung verschwindet im ganzen Berührungsgebiet; es existiert kein Gleitgebiet. Bei wachsender Tangentialkraft (wachsendem  $\mu$ ) wird der innere Kreis immer kleiner, die Größe des Gleitgebietes nimmt ständig zu. Schließlich schrumpft für  $\mu = \mu_0$  der innere Kreis auf den Radius Null und das ganze Berührungsgebiet beginnt zu gleiten.

Während nach Föppl  $\alpha$  für alle nicht zu großen Tangentialkräfte stets den Wert 0,36 behält, paßt sich hier  $\alpha$  an die jeweilige Tangentialkraft an und kann kontinuierlich alle Werte von 0 bis 1 durchlaufen.

Aus Gl. (39) ersieht man sofort, daß  $\mu$  den Wert  $\mu_0$  nie überschreiten kann, während nach Föppl  $\mu$  im Grenzfall um 13,6% größer werden kann als  $\mu_0$ . Die Frage nach der physikalischen Möglichkeit der Übertragung größerer Schubspannungen, als sie dem angenommenen Reibungsgesetz entsprechen, wird also überflüssig.

Die von Föppl geforderte Stetigkeit der Normal- und Schubspannungen ist auch bei den hier abgeleiteten Gleichungen erfüllt. Wie man sich leicht überzeugen kann,

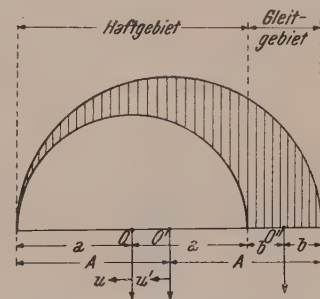


Abb. 3. Schubspannungsverteilung im Berührungsgebiet.



ist auch die Randspannung überall stetig und verschwindet im Unendlichen. Föppl fordert ferner, daß  $\sigma_t$  zu Beginn und am Ende des Gleitgebietes entgegengesetzt gleiche Werte annehmen soll.

Wendet man Gl. (29) für das Gleitgebiet an, so erhält man bei Beachtung von (30) (32 a), (33 a), (33 b) und (5):

$$\sigma_t = \pm \frac{\mu_0 E'}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \left( b + \frac{x}{|x|} \sqrt{x^2 - a^2} \right), \quad (40)$$

wobei das obere Zeichen für das getriebene, das untere für das treibende Rad gilt. Für  $x = a$  (Beginn des Gleitgebietes) erhält man daraus gemäß Gl. (35)  $\sigma_0$ , für  $x = -A - b$  (Ende des Gleitgebietes) ergibt sich:

$$\sigma_e = \mp \frac{\mu_0 E'}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \sqrt{b} (2\sqrt{A} - \sqrt{b}). \quad (41)$$

Die Föpplsche Forderung trifft hier nur für die speziellen Werte  $b = 0$  und  $b = A$  zu. Für ihre allgemeine Gültigkeit besteht auch keine physikalische Notwendigkeit.

### 5. Der Schlupf.

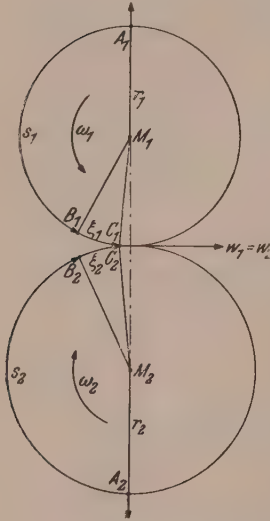


Abb. 4. Zur Ableitung des Schlupfes.

Zur Berechnung des Schlupfes gehen wir von Abb. 4 aus. Das obere (treibende) Rad besitze die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$ , das untere (getriebene) die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_2$ .  $C_1$  sei ein Punkt des Haftgebietes des treibenden Rades, der sich in der gezeichneten Stellung mit dem Punkt  $C_2$  des getriebenen Rades deckt. Wegen des Haftens müssen die Geschwindigkeiten  $w_1$  und  $w_2$  der beiden Punkte gleich sein. Ohne Deformation würde der Punkt  $C_1$  in  $B_1$ , der Punkt  $C_2$  in  $B_2$  liegen. Die zugehörigen elastischen Verschiebungen seien  $\xi_1$  und  $\xi_2$  ( $\xi_1$  ist in Wirklichkeit negativ).  $M_1 A_1$  und  $M_2 A_2$  seien feste Richtungen, die die Bewegung der Räder nicht mit machen. Die Punkte  $A_1$  und  $A_2$  seien praktisch spannungsfrei.  $s_1$  und  $s_2$  bedeuten die zeitlich veränderlichen Kreisbögen  $A_1 B_1$  und  $A_2 B_2$ .

Es gilt dann:  $w_1 = \frac{d}{dt} (s_1 + \xi_1)$  und  $w_2 = \frac{d}{dt} (s_2 + \xi_2)$ . Wegen der Gleichheit beider Geschwindigkeiten und wegen  $\frac{ds_1}{dt} = r_1 \omega_1$ ,  $\frac{ds_2}{dt} = r_2 \omega_2$  gilt:

$$r_1 \omega_1 + \frac{d\xi_1}{dt} = r_2 \omega_2 + \frac{d\xi_2}{dt}. \quad (42)$$

Nun ist aber  $\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{d\xi_1}{ds_1} r_1 \omega_1$  und ebenso  $\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{d\xi_2}{ds_2} r_2 \omega_2$ . Ersetzt man  $\frac{d\xi_1}{ds_1}$  und  $\frac{d\xi_2}{ds_2}$  durch die Dehnungen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ , so ergibt sich

$$r_1 \omega_1 (1 + \varepsilon_1) = r_2 \omega_2 (1 - \varepsilon_2). \quad (42a)$$

Wir brauchen nur jene Dehnungen zu berücksichtigen, die von den Schubspannungen herrühren, denn der von den Normalspannungen stammende hydrostatische Spannungszustand ändert bei gleichen elastischen Konstanten an den Haftverhältnissen nichts. Wir setzen also:  $\varepsilon_1 = -\frac{\sigma_0}{E'}$  und  $\varepsilon_2 = +\frac{\sigma_0}{E'}$  und erhalten aus (42a) in erster Ordnung:

$$\frac{r_1 \omega_1}{r_2 \omega_2} = 1 + 2 \frac{\sigma_0}{E'}. \quad (42b)$$

Der Schlupf  $S$ , bezogen auf eine Umdrehung des treibenden Rades ist:

$$S = (r_1 \omega_1 - r_2 \omega_2) \frac{2\pi}{\omega_1}. \quad (43)$$

Aus (42b) ergibt sich dann bis auf Glieder höherer Ordnung:  $S = 4 \pi r_1 \frac{\sigma_0}{E}$ . Geht man zum ebenen Verzerrungszustand über, so erhält man gemäß Gl. (25):

$$S = 4 \pi r_1 \frac{\sigma_0}{E} \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right). \quad (43a)$$

Föppl kommt auf Grund einer nicht korrekten Ableitung auf den doppelten Wert [vgl. [F] Gl. (68)].

Aus (43a) folgt, bei Verwendung von (35), (25), (37) und (39):

$$S = 2 \pi \mu_0 A r_1 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\mu}{\mu_0}} \right). \quad (44)$$

Bei Rad und Schiene setzen wir  $r_1 = r$ ,  $r_2 = \infty$  und erhalten:

$$S = 2 \pi \mu_0 A \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\mu}{\mu_0}} \right). \quad (44a)$$

Es soll nun der Vergleich zwischen den berechneten und gemessenen Schlupfwerten durchgeführt werden. Dazu verwenden wir die schon von Föppl benutzten Versuche von G. Sachs<sup>6</sup>. Die Versuche wurden mit Reibrädern von gleichem Halbmesser  $r_1 = r_2 = 15 \text{ cm}$  durchgeführt. Es kommen nur jene Messungen in Frage, bei denen die Werkstoffe der beiden Räder übereinstimmen. Es liegen Messungen mit einem Räderpaar aus Flußeisen sowie mit einem Räderpaar aus Weißbuche vor. Sachs faßt seine Ergebnisse in Schaubildern zusammen, worin er auf der Abszissenachse den Schlupf  $S$ , auf der Ordinatenachse den Beiwert der Haftreibung  $\mu = T/N$  aufträgt. Für  $r_1 = r_2$  folgt aus (44):

$$S = 4 \pi \mu_0 A \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\mu}{\mu_0}} \right). \quad (44b)$$

Nach (44b) müßte der Schlupf in Abhängigkeit von  $\mu$  einen parabolischen Verlauf zeigen. Der Scheitel der Parabel liegt im Punkt  $S = 4 \pi \mu_0 A$ ,  $\mu = \mu_0$ , die Achse der Parabel ist parallel zur Ordinate. Da  $\mu \leq \mu_0$  sein muß, findet für  $\mu = \mu_0$  der Übergang zum reinen Gleiten statt. Hier kann  $S$  unbegrenzt wachsen, während  $\mu = \mu_0$  bleibt. Nach Föppl wächst hingegen  $S$  linear mit  $\mu$  an, bis  $\mu$  den Wert  $\mu_0$  um 13.6% übersteigt. Dann springt  $\mu$  auf  $\mu_0$  zurück und es beginnt der reine Gleitschlupf.

Bei den Versuchen mit einem Räderpaar aus Flußeisen mit der axialen Breite von 0.25 cm verwendet Sachs einen Normaldruck von 6.57 kg. Es ist daher  $N = 6.67/0.25 = 26.7 \text{ kg/cm}$ .

In Abb. 5 ist Kurve I die von Sachs experimentell ermittelte Schlupfkurve (Abb. 26 bei Sachs). Kurve II entspricht der Gl. (44b), wobei  $E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $m = 10/3$  und  $\mu_0 = 0.5$  angenommen wurde, während  $A$  nach Gl. (26a) berechnet wurde. Kurve III ist der Schlupf nach Föppls Theorie. Die berechneten Werte sind sowohl nach Gl. (44b) als auch nach Föppl bedeutend kleiner als die gemessenen. Die Anfangsneigung der Föpplschen Geraden stimmt nur dann mit der der Meßkurve

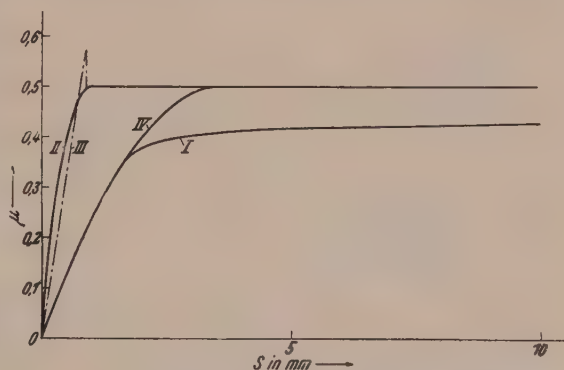


Abb. 5. Schlupf bei Räderpaar aus Flußeisen.

- I ... experimentelle Kurve von Sachs,
- II ... theoretische Kurve,
- III ... theoretische Kurve nach Föppl,
- IV ... theoretische Kurve nach affiner Streckung.

<sup>6</sup> G. Sachs: Versuche über die Reibung fester Körper. Z. angew. Math. Mech. 4, 1—32 (1924).

überein, wenn man, wie es Föppl irrtümlich tut, mit dem doppelten Wert von Gl. (43a) rechnet. Gl. (43a) ist jedoch für die Föpplsche Theorie genau so zuständig wie für die hier dargelegte. Sachs macht aber zu seinen Versuchen die Bemerkung, daß er anfangs, solange die Räder nicht eingelaufen waren, sehr große Schlupfe beobachtete, die sich in unregelmäßiger Weise ständig verkleinerten. Erst nach längerem Einlaufen konnten reproduzierbare Werte gemessen werden. Die absoluten Beträge des Schlupfes hängen offenbar stark von der Oberflächenbeschaffenheit der beiden Räder ab. Es ist also verständlich, daß sich die kleinen, von der Theorie geforderten Werte praktisch nicht verwirklichen lassen, da sie eine ideale Oberfläche voraussetzen. Um zu untersuchen, ob wenigstens der von der Theorie geforderte Charakter der Kurve richtig wiedergegeben wird, wurde die Parabel II längs der Abszisse affin gestreckt, bis sie im Ursprung dieselbe Neigung aufweist wie die Versuchskurve. Auf diese Weise erhält man die Parabel IV. Wie man sieht, fällt sie bis etwa  $\mu = 0.35$  sehr gut mit der experimentellen Kurve zusammen, erst dann beginnt sie sich abzulösen.

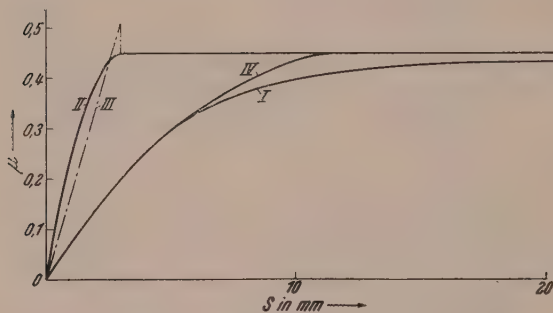


Abb. 6. Schlupf bei Räderpaar aus Weißbuche.

- I ... experimentelle Kurve von Sachs,
- II ... theoretische Kurve,
- III ... theoretische Kurve von Föppl,
- IV ... theoretische Kurve nach affiner Streckung.

Föppl berechneten Kurven. Auch hier sind die gemessenen Schlupfe wesentlich größer als die berechneten. Der parabolische Charakter ist, wie man aus Kurve IV sieht, für nicht zu große Werte von  $\mu$  gut gewahrt.

In beiden Fällen scheint somit die Parabel eine bessere Anpassung an die Beobachtung zu ergeben als die Gerade. Von einer Übertragung größerer Tangentialkräfte vor dem Einsetzen des vollständigen Gleitens und von einem plötzlichen Absinken der Tangentialkraft bei Eintritt des Gleitens ist bei den Sachsschen Kurven nichts zu merken. Die Tangentialkraft wächst sogar mit zunehmender Gleitgeschwindigkeit noch an. Das steht in Übereinstimmung mit Versuchen von Ch. Jakob<sup>7</sup>, die zeigen, daß die Gleitreibung bei kleinen Gleitgeschwindigkeiten mit der Relativbewegung anwächst. Doch ist auch ein Anwachsen der Haftreibung über den Wert der Gleitreibung möglich, wenn die sich berührenden Teile verunreinigt sind und stärkere Ungleichmäßigkeiten aufweisen. Da bei den Sachsschen Versuchen die Oberflächen gereinigt wurden, ist davon nichts zu merken. Alle diese Effekte kommen aber nur durch die Oberflächenbeschaffenheit der sich berührenden Teile zustande und können wohl nicht elastizitätstheoretisch begründet werden.

Es ist bemerkenswert, daß sowohl beim Räderpaar aus Flußeisen als auch bei dem aus Weißbuche die Abweichungen vom parabolischen Verlauf dann beginnen, wenn  $\mu$  etwa 70% von  $\mu_0$  beträgt. Bis dorthin scheint also die von der Theorie geforderte Trennung der Berührungszone in ein Haft- und ein Gleitgebiet vorhanden zu sein. Warum bei Steigerung der Tangentialkraft über 70% des Maximalwertes eine rasche Zunahme des Schlupfes eintritt, die auf ein Gleiten im ganzen Berührungs-

<sup>7</sup> Ch. Jakob: Ann. Physik 38, 126.



gebiet schließen läßt, wird von der künftigen Forschung geklärt werden müssen. Ebenso die Frage nach den eigentlichen Ursachen der großen Absolutbeträge des Schlupfes und ihr Zusammenhang mit dem Einlaufvorgang. Jedenfalls wird das der Theorie zugrunde gelegte Coulombsche Reibungsgesetz den tatsächlichen Vorgängen nur in grober Approximation gerecht.

## 6. Die Arbeit der rollenden Reibung.

Es soll schließlich noch die bei der rollenden Reibung pro Sekunde in Wärme umgesetzte Arbeit berechnet werden. Aus Abb. 4 entnehmen wir:

$$w_1 = \frac{d}{dt}(s_1 + \xi_1) = r_1 \omega_1 \left(1 + \frac{d\xi_1}{ds_1}\right) \quad \text{und} \quad w_2 = \frac{d}{dt}(s_2 + \xi_2) = r_2 \omega_2 \left(1 + \frac{d\xi_2}{ds_2}\right).$$

Im Haftgebiet muß  $w_1 = w_2$  sein, im Gleitgebiet besteht jedoch die Relativgeschwindigkeit:

$$\Delta w = w_1 - w_2 = r_1 \omega_1 \left(1 + \frac{d\xi_1}{ds_1}\right) - r_2 \omega_2 \left(1 + \frac{d\xi_2}{ds_2}\right).$$

Da es nur auf die von der Schubspannung herrührenden Dehnungen ankommt, gilt  $\frac{d\xi_1}{ds_1} = \frac{+\sigma_t}{E'}$  und  $\frac{d\xi_2}{ds_2} = \frac{-\sigma_t}{E'}$ . Daraus ergibt sich bei Beachtung von (42b) in erster Näherung:

$$\Delta w = \frac{2 r_1 \omega_1}{E'} (\sigma_0 - \sigma_t). \quad (45)$$

Im Haftgebiet ist  $\sigma_t = \sigma_0$ , dort ist also  $\Delta w = 0$ , wie es sein muß. Wärme kann also nur im Gleitgebiet produziert werden. Die sekundlich pro axialer Längeneinheit entwickelte Wärme ist der Reibungsarbeit  $L_v$  äquivalent:

$$L_v = \int_{-A}^{b-a} q'(u') \Delta w du'. \quad (46)$$

Setzt man in (46) die Werte für  $q'(u')$  gemäß Gl. (27) und für  $\Delta w$  gemäß Gl. (45), (35) und (40) ein, so erhält man:

$$L_v = \frac{\mu_0^2 E'}{4} r_1 \omega_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^2 \int_{-A}^{b-a} \sqrt{[(u' - b)^2 - a^2] [A^2 - u'^2]} du'. \quad (46a)$$

Nach Ausführen der Quadratur ergibt sich:

$$L_v = \frac{\pi}{8} \mu_0^2 E' r_1 \omega_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^2 b (A^2 - a^2). \quad (46b)$$

Bei Verwendung von (37) und (38) folgt daraus:

$$L_v = \frac{\pi}{8} \mu_0 E' r_1 w_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^2 A^3 \mu \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mu}{\mu_0}}\right). \quad (46c)$$

Zum selben Ergebnis müssen wir kommen, wenn wir die Verlustleistung summarisch aus Schlupf und Tangentialkraft ausrechnen. Ein Punkt des Umfanges des treibenden Rades legt pro Sekunde einen um  $\frac{\omega_1}{2\pi} S$  größeren Weg zurück als ein Punkt des Umfanges des getriebenen Rades. Es muß also gelten:

$$L_v = \frac{\omega_1}{2\pi} S T. \quad (47)$$

Setzt man hierin die Werte gemäß Gl. (44) und (36a) ein, so erhält man bei Beachtung von (39) wieder den Wert (46c). Dies kann als eine Probe auf die innere Widerspruchslosigkeit der Theorie gelten.

Versucht man hingegen, in die Gl. (45) und (46) die Werte nach der Föpplschen Theorie einzusetzen, so wird keine Übereinstimmung mit Gl. (47) erzielt; doch soll darauf nicht näher eingegangen werden.

(Eingegangen am 1. Juni 1948.)

## Eine Modelltheorie für Regelkreise\*.

Von H. Hochrainer, Wien.

Mit 14 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Nach Klärung der in der modernen Regeltechnik üblichen Begriffe werden verschiedene Reglertypen vergleichend betrachtet. Auf Grund gemeinsamer Eigenschaften wird der Versuch gemacht, ein allgemein verwendbares Modell zu entwickeln, mit dem das dynamische Verhalten und die Stabilität beliebiger Regelanlagen nachgebildet und studiert werden kann. Das gewählte Modell besteht aus einem rückgekoppelten Röhrenverstärker, an dem Schwingungsfähigkeit und auch aperiodische Grenzfälle betrachtet werden. Schließlich ist ein graphisches Verfahren gezeigt, mit dem außer dem Selbsterregungskriterium auch die Bedingungen für die Aperiodizität gefunden und anschaulich dargestellt werden kann, eine Erkenntnis, die als Ergebnis modelltheoretischer Betrachtungen anzusehen ist. Auch auf die Möglichkeit, das Modell für astatische Regelfälle zu erweitern, wird eingegangen.

**Summary.** After having cleared the concepts usual in modern control technique the author compares different types of regulators. Starting from their common properties he tries to develop a model of general use by which the dynamical behaviour and stability of any regulating device may be reproduced and studied. The model in question consists of a back-coupled valve amplifier for which both the oscillating ability and aperiodic limiting cases are considered. Finally a graphical method is shown by which it is possible to find and to demonstrate not only the criterion of self-excitement but also conditions of aperiodic behaviour. This follows from considerations concerning dimensional analysis. The possibility of extending the model to cases of astatic control is also discussed.

**Résumé.** Après avoir défini les notions usuelles de la technique moderne du réglage, l'auteur passe en revue les divers types de régulateurs. Se basant sur certaines propriétés communes, il essaie de développer une maquette d'emploi général, avec laquelle on peut représenter et étudier les conditions dynamiques et la stabilité d'une installation quelconque de réglage. Le modèle choisi comporte un amplificateur à lampes avec couplage en réaction, qui permet d'observer les possibilités de mise en oscillation ainsi que certains cas limites apériodiques. Grâce à un procédé graphique on peut, en plus du critère d'auto-excitation, trouver, et mettre en évidence, les conditions d'apériodicité. Cela résulte des considérations sur la théorie des maquettes. L'auteur discute aussi la possibilité d'adapter la maquette aux cas des réglages astatiques.

Wenn man in der Technik von Modellen spricht, so denkt man unwillkürlich an eine maßstäblich verkleinerte Nachbildung des Originals. Darüber hinaus müssen jedoch auch jene Anordnungen als Modelle bezeichnet werden, die nicht so sehr in der äußeren Form, sondern hauptsächlich in ihrem Verhalten und in ihrer Funktion dem Original gleichen oder zumindest stark ähnlich sind. Es gibt Fälle, wo verkleinerte Nachbildungen der äußeren Erscheinungsform der Originalapparatur aus physikalischen Gründen ein völlig anderes Verhalten oder eine völlig andere Funktion aufweisen. Man unterscheidet deshalb Anschauungsmodelle und Funktionsmodelle. Die beiden Modellarten dienen verschiedenen Zwecken. Das Anschauungsmodell dient dem Studium der äußeren Form und Anordnung von Apparateteilen, während das Funktionsmodell dem Studium der Funktion dienen soll.

Um ein Anschauungsmodell herzustellen, bedarf es meist keiner tieferschürfenden Theorie. Man hat einfach aus einem geeigneten Werkstoff eine maßstäblich richtige Verkleinerung des Originals herzustellen. Schwierigkeiten treten nur dann auf, wenn der geeignete Werkstoff nicht zur Verfügung steht oder das vorhandene Material eine maßstäblich richtige Verkleinerung nicht zuläßt. Aber auch dann kann man noch nicht von einer Modelltheorie sprechen. Theoretische Überlegungen sind meist erst nötig, wenn man ein Funktionsmodell entwickeln soll, an dem das Verhalten des Originals in einem Modellversuch studiert werden kann. Diese geistige Arbeit ist schon bei der Herstellung von rein mechanischen Funktionsmodellen oft recht erheblich. Es steigert sich der Aufwand jedoch besonders, wenn es sich um elektro-

\* Herrn Prof. Dr. E. Melan zum 60. Geburtstag gewidmet.



technische oder gar um allgemein physikalische Funktionsmodelle handelt. Es ist in diesen Fällen fast immer unvermeidlich, erst eine eigene Modelltheorie aufzustellen, ehe man an die Anfertigung des Modelles selbst gehen kann.

Daß derartige Anstrengungen sich lohnen, beweist die Entwicklung der Flugzeugkonstruktionen, die ohne Modelltheorien und Modellversuche überhaupt nicht mehr denkbar wäre. Auch der Schiffbau und der übrige Fahrzeugbau gewannen wertvollste Fortschritte durch Versuche mit Funktionsmodellen. Es ist auch verständlich, warum gerade diese Gebiete der Technik auf die Modellversuche so stark angewiesen sind. Versuche mit Objekten in Originalgröße sind zu kostspielig und oft infolge der Gefährdung des Bedienungspersonals bei Versuchsfahrten einfach unmöglich.

Weniger hat die Elektrotechnik Modelltheorien verwendet, da hier die Objekte meist in Originalform ohne allzu hohen Kostenaufwand studiert werden können. In der letzten Zeit hat sich jedoch die Elektrotechnik ein Gebiet erobert, das schon längst in aller Stille größte Bedeutung für industrielle und wirtschaftliche Produktion gewonnen hat: Die automatische Regelung der Kraftmaschinen hinsichtlich Leistungsabgabe und Drehzahl. Auf diesem Gebiete gibt es ein Gewirr, ja ein Gestrüpp von Schwierigkeiten, die alle gipfeln in der Frage nach der Stabilität. Es ist hier fast aussichtslos, das Verhalten eines automatisch geregelten Systems einfach voraus zu berechnen, geschweige denn Mittel und Wege rein theoretisch zu finden, um einen stabilen Betrieb in der Praxis zu gewährleisten. Hier ist man immer wieder — selbst in einfachsten Fällen — auf das Experiment angewiesen.

Solange sich die Regelautomatik darin erschöpfte, mit dem Fliehkraftpendel die Kraftmittelzufuhr der Antriebsmaschine in Abhängigkeit von der Drehzahl rein statisch selbsttätig zu regulieren, das heißt zu regeln, konnte man die optimale Einstellung jener mechanischen Abhängigkeiten, die das Schwingen des Reglers vermeiden sollten, experimentell am Original leicht finden. Will man jedoch ganze Kraftwerkskomplexe mit komplizierten Röhrengeräten automatisch und aus der Ferne regeln, kann am Original aus betriebstechnischen Gründen nichts herumprobiert werden. Ein Modellversuch ist unerlässlich, besonders wenn es sich um astatische Regelungen handelt, bei denen sich die Stabilisierung äußerst schwierig gestaltet. Um nun hier überhaupt Modellversuche machen zu können, genügt es nicht, die Originalanlagen maßstäblich verkleinert nachzubauen, sondern es muß vielmehr erst eine genaue Modelltheorie entwickelt werden.

Da die Probleme der Regeltechnik, insbesondere die Stabilisierung von automatisch regulierten Systemen auch auf anderen Gebieten der Technik Bedeutung gewinnt, erscheint es nötig, einmal eine allgemeine Theorie für regeltechnische Modellversuche aufzustellen, wobei es besonders zweckmäßig sein dürfte, für alle Untersuchungen den Regelkreis, das heißt die geschlossene Kette aller an der Regelung beteiligter Elemente, durch einen rückgekoppelten oder, um den amerikanischen Ausdruck zu gebrauchen, rückgespeisten Röhrenverstärker als Funktionsmodell zu ersetzen.

Vielleicht ist es erwünscht, zuerst über die wichtigsten Grundelemente und Grundbegriffe sowie über die Bezeichnungen der Regeltechnik ein paar Worte zu hören, bevor auf die Modelltheorie eingegangen wird.

Abb. 1 zeigt in schematischer Darstellung das Zusammenwirken aller an einer automatischen Regelung grundsätzlich beteiligten Elemente sowie deren Bezeichnung.

Die zu regelnde Größe heißt Regelgröße. Sie fließt im allgemeinen von einem Produzenten ( $P$ ) zu einem oder mehreren Konsumenten ( $K$ ). Die Strecke zwischen jener Stelle, an der eine Einflußnahme auf die Regelgröße direkt oder indirekt möglich ist ( $I$ ), und jener Stelle, an der die Messung der Regelgröße erfolgt ( $2$ ), nennt man Regelstrecke, wohingegen die Apparatur, die eine Veränderung der Kraftmittelzufuhr bzw. der Regelgröße bewirkt, das Stellglied ( $St$ ) heißt.



Um eine automatische Verstellung des Stellgliedes zu erreichen, muß zunächst die Regelgröße gemessen werden, was an der Meßstelle geschieht. Der Meßwert wird dann entweder direkt oder nach entsprechender Umformung ( $MU$ ) mit einem Sollwert — vom Sollwertgeber ( $SG$ ) aus willkürlich einstellbar — verglichen ( $A$ ). Ist eine Abweichung zwischen Meßwert (Istwert) und Sollwert vorhanden, so wird entweder direkt oder über entsprechende Kraftverstärker ( $V$ ) durch eine abweichungsproportionale Größe (Gleichstrom) das Stellglied nachgestellt, so daß die Abweichung sich verringert. Es kann dabei diese Abweichung restlos beseitigt werden, oder aber es bleibt ein gewisser Fehler bestehen. Man spricht dann von einer astatischen Regelung im ersten Fall und von einer statischen Regelung im letzten Fall. Es ist damit eine wichtige Einteilung der automatischen Regelungsarten getroffen.

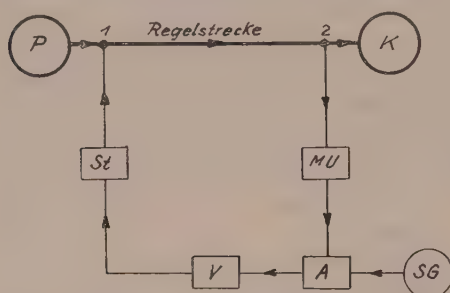


Abb. 1. Der Regelkreis.

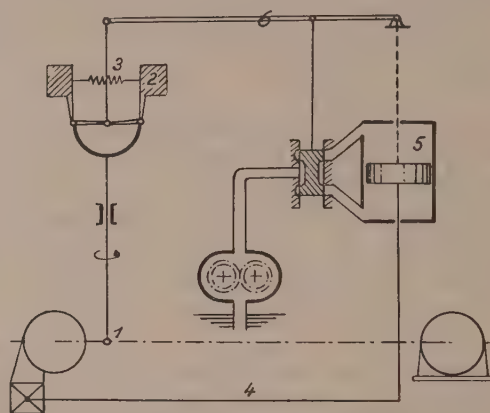


Abb. 2. Fliehkraft-Pendelregler.

Bevor nun weiter auf die Theorie des Regelkreises eingegangen wird, sollen zunächst einige Beispiele aus verschiedenen Gebieten der Technik aufgezählt werden, an denen die einzelnen Elemente des Regelkreises deutlich erkennbar sind.

Als erstes sei hier der klassische Regler der Kraftmaschine erwähnt, der Fliehkraft-Pendelregler nach Watt. Wir unterscheiden hier (Abb. 2) Meßstelle (1), Meßwertumformer = Pendel (2) (Drehzahl in proportionale Kraft umgewandelt), Sollwertgeber = Feder (3). Sollwert = Gegenspannung der Feder. Das Stellglied ist das entsprechende Gestänge zur Bewegung der Drosselklappen bzw. ganz allgemein des Kraftmittelzufuhr-Drosselorganes (4). Aber noch fehlt ein wichtiges Glied in diesem Regelkreis, das fast immer benötigt wird: Der Kraftverstärker oder das Kraftschaltglied in Gestalt eines hydraulischen Verstärkers, der die geringfügige Energie, die in der Verstellung der Reglermuffe bei Änderungen der Drehzahl, das heißt bei Abweichungen vom Sollwert, aufgebracht wird, so weit verstärkt, daß das eigentliche Stellglied betätigt werden kann.

Der Fliehkraftregler ist im allgemeinen ein statischer Regler, das heißt, es bleibt eine gewisse Abweichung bestehen. Sie wird sozusagen gebraucht, um die neue Stellung des Drosselorganes, das heißt der Regelstrecke zu erhalten. Aber durch geeignete Ausbildung des Stellgliedes im Verein mit dem Kraftverstärker gelingt es, die Empfindlichkeit des Reglers so zu steigern, daß die Regelabweichungen sehr gering bleiben. Auf die dabei auftretenden Schwierigkeiten in der Beherrschung der Stabilität soll erst später eingegangen werden.

Als zweites Beispiel für einen statischen Regler sei der Schwundausgleich in Radioempfängern angeführt. Hier ist (Abb. 3) die Meßstelle der Ausgang des zweiten Zwischenfrequenz-Bandfilters (1), der Meßwertumformer (2) ist die Diodengleichrichtung. Das Stellglied ist hier kein mechanisch greifbarer Bestandteil, sondern einfach das Steuergitter des ersten H. F.-Verstärkerrohres, dessen Verstärkungsgrad

durch die negative Vorspannung beeinflußt werden kann, die aus der Differenz zwischen der gleichgerichteten Zwischenfrequenz-Trägerspannung und einer festen Sollwertgleichspannung (3) gewonnen wurde. Der Verstärker ist hier auch wieder vorhanden. Er liegt nur diesmal nicht zwischen Sollwertvergleich und Stellglied, sondern ist dem Meßwertumformer an der Meßstelle direkt vorgeschaltet in Gestalt des gesamten Verstärkerkomplexes vom Eingangsmischrohr bis zum Z. F.-Bandfilterausgang.

Auch hier ist die Regelung statisch und wird in der Empfindlichkeit von der Größe der Verstärkung abhängen.

Ein anderes Beispiel ist etwa durch eine Temperaturregelung (Abb. 4) gegeben. Hier ist verlangt, daß eine bestimmte Temperatur erhalten bleiben soll. Als Meßwertumformer dient beispielsweise ein elektrisches Widerstandsthermometer (1), das in einer Brückenschaltung mit einem Sollwertgeber in Gestalt eines Abgleichpotentio-

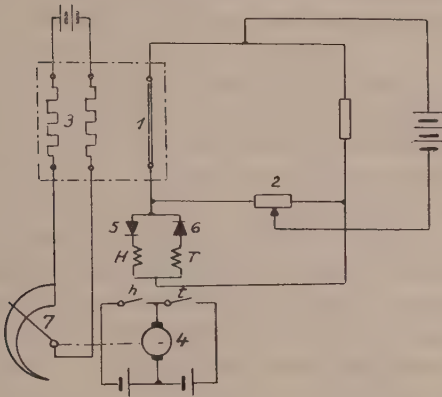


Abb. 4. Temperaturregelung.

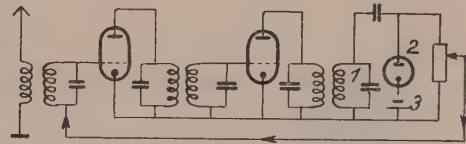


Abb. 3. Schwundregelung.

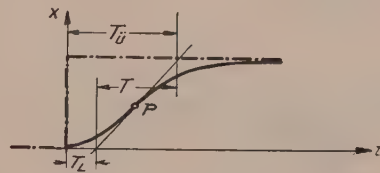


Abb. 5. Übergangsfunktion.

mers (2) zusammengeschaltet ist. Die Abweichung der Temperatur in der Umgebung des Widerstandsthermometers 1 von einem gewählten Sollwert äußert sich als negative oder positive Gleichspannung an den Enden des Widerstandes 2. Über Gleichrichter 5 und 6 werden Schaltrelais *H* und *T* je nach dem Vorzeichen der Abweichung zum Ansprechen gebracht. Sie bilden zusammen mit einem kleinen Stellmotor (4) zur kontinuierlichen Verstellung eines Regulierwiderstandes 7 im Stromkreis des Heizfadens 3 den Kraftverstärker. Die Verstellung der Kraftmittelzufuhr erfolgt also beim Stellglied 7. Die Regelung ist astatisch, das heißt der Motor läuft so lange, bis die Abweichung der Temperatur beseitigt ist.

Es sind hier drei Beispiele ganz verschiedener Art aus dem weiten Anwendungsgebiet der automatischen Regelung herausgegriffen und trotzdem lassen sich die einzelnen charakteristischen Elemente des sogenannten Regelkreises deutlich unterscheiden. Man sieht also, daß der Versuch, zur Behandlung und zum Studium der einzelnen Fälle eine gemeinsame Modelltheorie zu entwickeln, aussichtsreich sein dürfte. Es ist nur nötig, auch für das dynamische Verhalten eine gemeinsame Linie zu finden...

So einfach nämlich, rein statisch betrachtet, der Vorgang der automatischen Regelung erscheint, so überhäuft mit Problemen ist das dynamische Spiel der Regelanordnung. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, daß die einzelnen Elemente des Regelkreises fast nie mechanisch starr miteinander verbunden sind, sondern stets Systeme darstellen, die erst in Energieaustausch treten müssen, um die schließlich gewünschte Wirkung auf das Stellglied am Anfang der Regelstrecke auszuüben. Der Energieaustausch bedingt Zeitverlust und so kann es passieren, daß ein Stoß



am Eingang des Verstärkers, wie in Abb. 5 gezeigt, nach Durchlaufen der Regelstrecke und der weiteren Elemente des Regelkreises erst nach einiger Zeit und in veränderter Form an den Eingang des Verstärkers zurückkehrt, wie dies in dem über der Zeit in Abb. 5 aufgetragenen Verlauf der Größe  $x$  zum Ausdruck kommt. Man bezeichnet dabei die von der Wendetangente im Wendepunkt  $P$  auf der Zeitachse abgeschnittene Zeit die „Laufzeit“  $T_L$ . Der Abschnitt auf der dem Endwert von  $x$  entsprechenden Abszissenparallelen heißt „Übergangszeit“  $T_U$  und die Projektion des Tangentenabschnittes zwischen der Zeitachse und der Endwertslinie, also die Differenz zwischen  $T_U$  und  $T_L$  ist definiert als „Zeitkonstante“ des Regelkreises.

Für das dynamische Verhalten der Regelanlage ist es nun von ganz wesentlicher Bedeutung, daß die Rückmeldung der Ausregelbewegung am Stellglied erst nach der Übergangszeit  $T_U$  am Verstärkereingang wieder eintrifft. Dies hat nämlich, wie

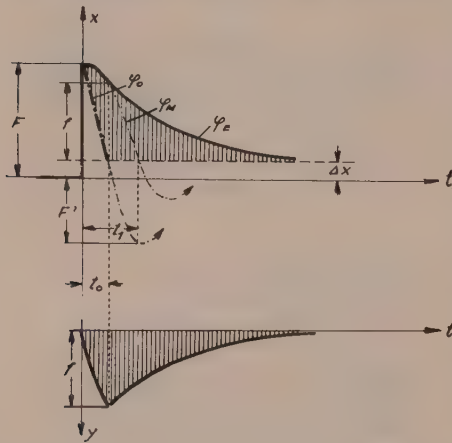


Abb. 6. Ausregelung einer Störung.

leicht einzusehen ist, zur Folge, daß zwangsläufig die Verstellung des Stellgliedes viel zu weit geht und durch dieses „Überregeln“ ein neuer Fehler erzeugt wird, der nach Ablauf der Übergangszeit wieder ein Rückregeln verursacht. Auch dann gelangt das Stellglied erst zu spät zum Stillstand und muß erneut wieder die umgekehrte Bewegung beginnen. Dies kann leicht dazu führen, daß das ganze System des Regelkreises eine ungedämpfte, ja sogar in besonders ungünstigen Fällen eine aufschaukelnde Schwingung ausführt, die leicht mit der Zerstörung des einen oder anderen Elementes ein Ende finden könnte.

Die ganze Arbeit des Regeltechnikers zielt nun darauf ab, diese Schwingungen durch Hilfseinrichtungen möglichst aperiodisch, das heißt überhaupt schwingungsfrei abzdämpfen. Dies ist nicht immer ganz einfach und manches Regelproblem ist aus diesem Grunde bis heute noch ungelöst. Je größer und je vielgestaltiger der Regelkreis wird, um so undurchsichtiger werden die Stabilitätsverhältnisse. Gerade deshalb greift man in jüngster Zeit zu einem Funktionsmodell, das oft nur darin bestehen kann, daß man versucht, ein elektrisches Ersatzschema zu finden. Die Stabilisierungsmöglichkeiten lassen sich da meist sehr schnell nach den bekannten Gesetzen der Verstärker- und Vierpoltheorie finden und nach Anwendung entsprechender Transformationen in den konkreten Fall höchst erfolgreich einbauen.

Man erkennt dabei bald — fast möchte man sagen: rein anschauungsmäßig, daß das Wesen jeglicher Stabilisierung darin bestehen muß, durch Einführen einer vorübergehenden Zusatzgröße die Rückmeldung der Korrekturbewegung so zu beschleunigen, daß das Stellglied gerade dann stillgesetzt wird, wenn die endgültige Ausregelstellung erreicht ist, die der Beseitigung oder der bestmöglichen Verminderung des Fehlers entspricht. Dies ist am besten ersichtlich, wenn man sich die Ausregelung eines plötzlich auftretenden Fehlers an Hand seines zeitlichen Ablaufes vorzustellen versucht. Abb. 6 zeigt dies deutlich.  $F$  sei der plötzlich auftretende Fehlwert. Er möge trägheitslos angezeigt werden. Nun tritt, angeregt durch den Abweichungswert, das Stellglied sogleich in Funktion und verstellt den Anfangspunkt der Regelstrecke so, daß bei verzögerungsfreier Rückmeldung der Meßwert den Verlauf  $\varphi_0$  nehmen würde. Das Stellglied müßte nun zur Zeit  $t_0$  bereits stillgesetzt werden, wenn dort der Endwert  $\Delta x$  der Ausregelung erreicht ist.  $\Delta x$  ist bei astatischer Regelung praktisch



Null. Nun erfolgt aber die Rückmeldung der Rückstellbewegung erst nach der Funktion  $\varphi_M$ , so daß erst nach der Zeit  $t_1$  die Abweichung tatsächlich verschwindet.  $\varphi_0$  ist jedoch unterdessen nach  $F'$  gelaufen und sucht nun diesen Fehler wieder durch eine entgegengesetzte Bewegung auszugleichen.

Die Stabilisierung muß nun eine Größe  $y$  enthalten, die von der Bewegung des Stellgliedes direkt abgeleitet wird und so rasch anwächst, daß sie nach der Zeit  $t_0$  den Wert  $f$  erreicht, der gleich ist der Differenz zwischen dem Endwert  $\Delta x$  von  $\varphi_0$  und dem bei  $t_0$  bestehenden Meßwert der Funktion  $\varphi_M$ . Die zweite Forderung besteht darin, daß nach Stillstand des Stellgliedes bei  $t_0$  die Stabilisierungsgröße vollkommen kongruent mit  $\varphi_E$ , der Meßwertfunktion abklingt, gleichgültig, wie diese verläuft. Sie muß sozusagen das Nachhinken der Korrekturmeldung exakt kompensieren. Verläuft also die Meßfunktion  $\varphi_E$  nach einer gedämpften Schwingung, so muß auch die Stabilisierungsgröße die Eigenschaft besitzen, nach einer gedämpften Schwingung abzuklingen.

Die Stabilisierungsgröße ist also in jedem Falle von der Bewegung des Stellgliedes abzuleiten und muß irgendwie eine Nachbildung des gesamten Regelkreises enthalten, um gemeinsam mit der Meßwertfunktion nach dem Stillstand des Stellgliedes abzuklingen. Ihre Einführung in den Regelkreis hat immer dort zu erfolgen, wo der Meßwert mit dem Sollwert verglichen als Abweichung in Erscheinung tritt. Da diese Einflußnahme entgegen der Flußrichtung des Regelimpulses stattfindet, spricht man allgemein von Rückführung oder Rückspeisung.

Baut man nach dieser Regel im ersten Beispiel in Abb. 2 eine Rückspeisung zur Stabilisierung ein, so muß sie von der Bewegung des Stellgliedes, nämlich des Kolbens 5, abgeleitet sein und auf den Meßwert, nämlich die Stellung des Pendelhebels 6, rückstellend bzw. rückdrängend wirken — etwa in Form eines ölgedämpften Stoßkolbens, so daß die Drehzahlkorrektur und das Nachgehen des Stoßkolbens so gleichmäßig erfolgt, daß der Punkt 6 des Pendelhebels in absoluter Ruhe bleibt.

Im Falle der Schwundregelung ist die Übergangszeit kurz und meist eine Stabilisierung nicht nötig, da keine Unstabilität besteht. Woraus dies abgeleitet werden kann, ist aus den späteren Betrachtungen am Modell zu ersehen.

Bei der astatischen Temperaturregelung ist das Stellglied der Regulierwiderstand 7, von ihm muß über eine große Verzögerungskette ein Stromfluß abgeleitet werden, der etwa über je eine zweite gegengeschaltete Relaiswicklung ein rechtzeitiges Abfallen des Relais bewirkt und somit den Motor dann stillsetzt, wenn bereits der der gewünschten Endtemperatur entsprechende Stromwert mit dem Regulierwiderstand eingestellt ist.

Daß all diese Überlegungen auch für nicht stoßartig einsetzende Störungen richtig sind, ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, daß jede beliebige Zeitfunktion in kleine treppenförmig verlaufende Stöße aufgelöst werden kann, für die dann wieder die gleichen Gesetzmöglichkeiten gelten wie für den Einzelstoß.

Um nun ganz allgemein eine Vorausberechnung von Rückspeiseeinrichtungen angeben zu können, erscheint es zweckmäßig, alle bisher geschilderten Vorgänge an Hand eines Modelles theoretisch und praktisch zu studieren. Ein derartiges Modell ist in Abb. 7 dargestellt. Die Röhre  $Rö$  versinnbildlicht als Pentode die reinen Verstärkungseigenschaften, die in einem Regelkreis enthalten sind. Der Vierpol hingegen soll die gesamten Verzögerungsglieder mit ihrem charakteristischen Verhalten

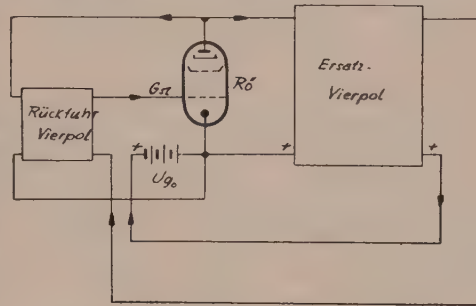


Abb. 7. Statisches Regelkreismodell.

nachbilden. Die Röhre stellt aber gleichzeitig auch das Stellglied dar. Die relativen Bewegungen des Stellgliedes sind am Anodenstrom zu sehen.

Der Meßwert ist der nach Durchlaufen des Ersatzvierpoles ans Gitter gelangende Bruchteil der Anodenspannung, während der Sollwert als Gegenspannung  $U_{g_0}$  eingeführt ist. Der Anschluß der Gitterspannung, das heißt des Meßwertes muß im Gitterkreis so erfolgen, daß eine Zunahme des Anodenstromes auch eine Erhöhung der negativen Gittervorspannung, rein statisch gesehen, hervorruft. Enthält der Vierpol eine weitgehende Verzögerung, so kann bei einer bestimmten Periodenzahl eine Selbsterregung des Systems eintreten. Es läßt sich hier leicht nach den von Barkhausen angegebenen Kriterien die Stabilitätsgrenze formulieren. Das System enthält also durchaus die Möglichkeit, das Verhalten eines statischen Regelsystems nachzubilden. Vor allem ist die Einführung einer stabilisierenden Rückführung sehr

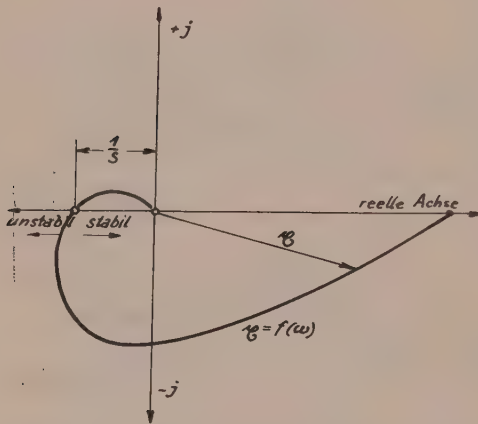


Abb. 8. Frequenzgang.

einfach. Abb. 7 zeigt dies im Schema. Ein von der relativen Anodenspannungsänderung, die der Bewegung des Stellgliedes entspricht, abgeleiteter Strom wird über einen Rückführvierpol ebenfalls dem Steuergitter  $G_{st}$  zugeführt, so daß am Gitter die Summe aus Abweichungsgröße und Rückführgröße wirksam wird, wie oben gefordert war.

Wie ist nun ein beliebiger statischer Regelkreis entsprechend nachzubilden? Dies kann prinzipiell in zweierlei Form erfolgen. Entweder man macht den Frequenzgang des Ersatzvierpoles gleich dem Originalfrequenzgang des Regelkreises oder man nimmt die sogenannte Übergangsfunktion am Originalkreis auf und versucht den Ersatzvierpol darnach auszulegen.

Es soll zunächst gezeigt werden, wie aus der Darstellung des Frequenzganges in der Gaußschen Zahlenebene das Verhalten des geschlossenen Regelkreises genau vorausbestimmt und wie auch die Rückspeisung in einfacher Weise dimensioniert werden kann.

Es sei zu diesem Zwecke Abb. 8 betrachtet. Der positiven reellen Achse entspricht hier die Richtung des Anodenstromvektors, während auf der negativen reellen Achse der zugehörige Gitterspannungsvektor gedacht werden muß. Schneidet man nun den Modellkreis in Abb. 7 hinter dem Ersatzvierpol auf und legt man an das Steuergitter eine sinusförmige Wechselspannung konstanter Amplitude und variabler Frequenz, so gelangt aus dem Ersatzvierpol zur Schnittstelle eine Wechselspannung, deren Phasenlage und Amplitude von der Frequenz abhängt. Verbindet man die Endpunkte aller entsprechender Spannungsvektoren in der komplexen Vektordarstellung der Abb. 8, so erhält man bekanntlich eine Ortskurve. Wählt man nun den Maßstab so, daß nicht Spannungswerte, sondern die Widerstandswerte  $\gamma$  des Vierpoles aufscheinen, so kann man, wie ebenfalls bekannt, aus der Lage des Schnittpunktes der Ortskurve mit der negativen Achse leicht feststellen, ob die Anordnung selbsterregt schwingt, gedämpft ist oder gar eine aufschaukelnde Schwingung ausführt. Liegt dieser Schnittpunkt nämlich rechts von dem Punkte  $1/S$ , wobei  $S$  die Steilheit in mA/V bedeutet, so ist die Anordnung stabil, das heißt sie schwingt höchstens gedämpft aus, liegt er genau im Punkt  $1/S$ , dann tritt gerade Selbsterregung ein. Man denke an die Barkhausensche Formel

$$1 = k \cdot v,$$



wobei  $k$  den Grad der Rückspeisung und  $v$  die Spannungsverstärkung des Rohres bedeutet. Hier ist an Stelle der Verstärkung  $S \cdot \mathfrak{z} = v$  als komplexe Größe zu denken, während  $k$  als skalarer Kopplungsfaktor zu werten ist, der in dem Widerstandsvektor  $\mathfrak{z}$  enthalten ist. Der Vektor  $\mathfrak{z}$  wäre demnach die reine Impedanz des Vierpoles  $VP$  von der Anodenseite des Rohres  $Rö$  aus gesehen. So ergibt sich an der Stelle

$$\mathfrak{z} = -\frac{1}{s}$$

durch Einsetzen

$$\mathfrak{z} = k \cdot \mathfrak{z} = -\frac{1}{s} \quad \text{oder} \quad k \cdot v = -1.$$

Diese Tatsachen sind längst bekannt, nur meist noch wenig auf den Regelkreis angewendet. Es entspricht die Betrachtungsweise etwa dem von H. Nyquist in Bell Syst. techn. Journal 11, 126, 147 (1932) angegebenen Verfahren sowie dem von Artus in verschiedenen Arbeiten über die Stabilität von Regelsystemen eingeschlagenen Weg.

Sehr bedauerlich ist es, daß die mathematische Behandlung der Stabilitätsfragen nicht mehr zutage förderte als die Feststellung der Selbsterregungsbedingung. Es ist nämlich ebenso wichtig, ja vielleicht noch wichtiger, auch den Fall der reinen Aperiodizität zu erfassen und willkürlich herbeiführen zu können. Denn nur dieser Fall oder zumindest eine weitgehende Annäherung an ihn garantiert in der Praxis einen stabilen Betrieb der Regelanlage.

Nun läßt sich ein relativ einfacher Weg angeben, der gestattet, den aperiodischen Grenzfall sozusagen aus der Ortskurvendarstellung mit einer kleinen Hilfskonstruktion herauszuschälen.

Betrachten wir das Beispiel eines Regelkreises zweiter Ordnung, das heißt dessen eigene Differentialgleichung die Form

$$r \cdot \ddot{x} + p \cdot \dot{x} + q^* \cdot x = 0$$

hat. Es ist dabei der Koeffizient  $q^*$  des Gliedes  $x$  zusammengesetzt aus einer durch die Elemente des Regelkreises bestimmten Konstanten  $q$  und aus dem Wert  $k \cdot s$ , den oben erwähnten skalaren Größen des Kopplungsgrades und der Steilheit des Verstärkers. Es gilt somit

$$q^* = q + k \cdot S.$$

Aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung erhält man bekanntlich zwei Wurzelwerte, die unter Umständen konjugiert komplex sein können in der Form

$$\delta \pm j \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \delta \pm j \omega^*.$$

Dies bedeutet dann eine gedämpfte Schwingung mit der Frequenz  $\omega^*$ , wenn man bedenkt, daß es sich dabei um den Exponentialkoeffizienten  $\lambda_{1,2}$  der Funktion  $e^{\lambda_{1,2}t}$  handelt. Es ist dann  $\delta$ , der Dämpfungswert

$$\delta = -\frac{p}{2r}$$

und  $\omega_0$  die Resonanzfrequenz des Regelkreises

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{q^*}{r}}$$

Man erhält für die Ortskurvendarstellung des Vierpolwiderstandes  $\mathfrak{z}$  im obigen Beispiel den Wert

$$\mathfrak{z} = \frac{k}{q - r\omega^2 + jp \cdot \omega}.$$

Setzt man nun  $\omega = \omega_0$  und variiert man die Werte  $q$ ,  $r$  und  $p$  nach Belieben, so erhält



man einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der negativen reellen Achse liegt und der durch den Ursprung sowie durch den Punkt  $-\frac{1}{S}$  hindurchgeht. Dies ist leicht bewiesen, wenn man bedenkt, daß

$$r \cdot \omega_0^2 = q^* = q + k \cdot S$$

ist und somit der Vektor  $\mathfrak{r}$  die Form erhält:

$$\mathfrak{r} = \frac{k}{-k \cdot S + j p \cdot a_0}.$$

Es läßt sich leicht einsehen, daß ein Vektor von der Gestalt

$$\eta = \frac{-A}{B \pm j C}$$

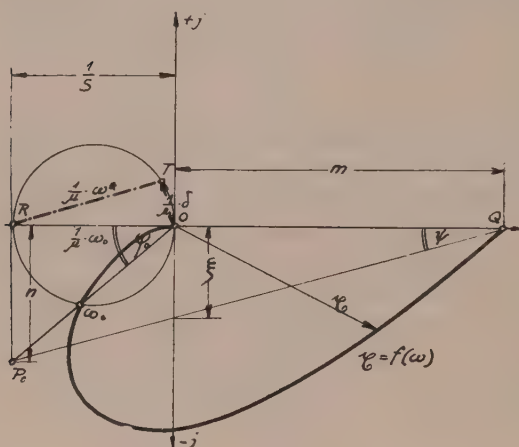


Abb. 9. Resonanzfrequenz und Dämpfung.

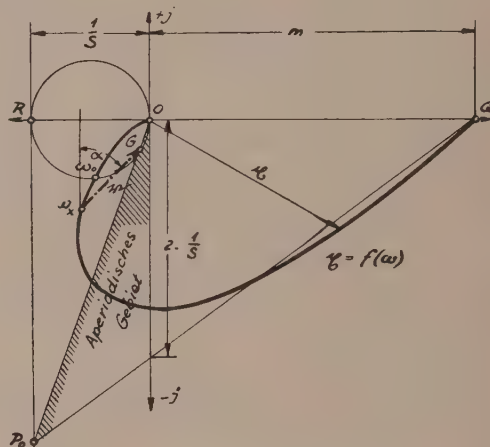


Abb. 10. Der aperiodische Grenzfall.

dann einen Kreis mit den obenerwähnten Forderungen beschreibt, wenn das Verhältnis  $A/B$  bei Veränderung irgendwelcher Parameter von  $A$ ,  $B$  und  $C$  konstant bleibt. Dieses Verhältnis entspricht dann gerade dem Durchmesser des Kreises (s. Abb. 9). Das bedeutet also, daß die Resonanzfrequenz des geschlossenen Regelkreises durch jenen Wert auf der Ortskurve  $\mathfrak{r}$  ausgedrückt ist, der dem Schnittpunkt mit dem charakteristischen Kreis entspricht (s. Abb. 9). Will man jetzt wissen, mit welcher Frequenz das System tatsächlich ausschwingt — eine Selbsterregung ist im vorliegenden Falle ausgeschlossen —, so ist noch die Kenntnis des Dämpfungswertes nötig. Auch dieser Wert ist leicht abzulesen, wenn man folgende Hilfskonstruktion anwendet (Abb. 9): Man verlängert zunächst den der Frequenz  $\omega_0$  entsprechenden Vektor solange, bis der Strahl die zur imaginären Achse Parallele an den charakteristischen Kreis schneidet ( $P_0$ ). Den so erhaltenen Punkt verbindet man nunmehr mit dem Punkt  $Q$ , dem Fußpunkt der Ortskurve auf der positiven reellen Achse. Die so auf der imaginären Achse abgeschnittene Strecke  $\xi$  ist nun proportional dem  $\delta$ . Wählt man einen Faktor  $\mu$  so, daß

$$\mu \cdot \frac{1}{S} = \omega_0$$

wird, so ergibt

$$\mu \cdot \frac{\xi}{2} = \delta.$$

Schlägt man also mit dem Zirkel  $\frac{\xi}{2}$  von 0 aus am charakteristischen Kreis ab, so ergibt die Strecke

$$\overline{RT} = \frac{1}{\mu} \cdot \omega^*.$$

Obige Konstruktion läßt sich leicht beweisen. Es ist zunächst der Abschnitt  $\overline{RP}_0 = n$  gleich zu setzen mit

$$n = \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot \frac{1}{S} = \frac{p \cdot \omega_0}{k \cdot S^2},$$

da sich der  $\operatorname{tg} \varphi_0$  aus  $\xi_0$  zu

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{p \cdot \omega_0}{k \cdot S}$$

bestimmen läßt.

Setzt man nun in die Parametergleichung für  $\xi$   $\omega = 0$  ein, so erhält man  $m$  in der Form

$$m = \frac{k}{q}.$$

Setzt man ferner für  $n$  und  $m$  in

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{n}{m + \frac{1}{S}}$$

ein, so erhält man schließlich

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2 \delta}{\omega_0 \cdot S \cdot m}.$$

Die Strecke  $\xi$  entspricht demnach

$$\xi = m \cdot \operatorname{tg} \psi = \frac{2 \delta}{\omega_0 \cdot S}$$

womit die Richtigkeit obiger Behauptung bewiesen ist.

So einfach und rasch diese Konstruktion aus der Ortskurve die Dämpfung und die Abschwingfrequenz zu finden gestattet, so bedeutsam wird sie für die Festlegung des aperiodischen Grenzfalles. Es muß ja dort

$$\delta = \omega_0$$

sein. Dementsprechend ist  $\omega^* = 0$ . Die Strecke  $\xi$  ist dann  $2 \cdot \frac{1}{S}$ . Abb. 10 zeigt die Zusammenhänge. Der Strahl  $QP_0$  legt nun einen Grenzwinkel für alle Systeme mit der Grundlinie  $OQ = m$  fest, von dem an ein aperiodisches Einstellen erfolgt. Liegt beispielsweise der Schnittpunkt außerhalb des Winkels wie bei der eingetragenen Ortskurve, so würde das System gedämpft ausschlagen. Will man das verhindern, so hat man nur dafür zu sorgen, daß bei irgendeiner Frequenz  $\omega_x$  ein Vektor  $r_x$  dem  $\xi_x$  so entgegenwirkt, daß gerade der Grenzpunkt  $G$  als Schnittpunkt der neuen Ortskurve erscheint. Man wählt da zweckmäßig gleich einen Rückführ-Vierpol, der eine reziproke Ortskurve gegenüber dem Regelkreis selbst aufweist, das heißt der bei  $Q$   $\omega = \infty$  hat, wenn der Regelkreis dort  $\omega = 0$  zeigt und ebenso beim Ursprung  $O$ . In unserem Modellkreis würde beispielsweise ein  $R-C$ -Kreis als Ortskurve erscheinen, wobei eine Rückwirkung auf  $m$  selbst vernachlässigt wird.

Man erhält nach Abb. 10 aus dem Winkel  $\alpha$  und aus der gewählten Frequenz  $\omega_x$  Kapazität und Widerstand nach

$$\operatorname{tg} \alpha = \omega_x \cdot C \cdot R,$$

also somit die Zeitkonstante  $T = C \cdot R$  des einfachsten Rückführkreises.

Dies läßt sich gewiß auch auf mechanische Systeme anwenden. Es ist hier nicht der Raum, dies im Detail zu behandeln.

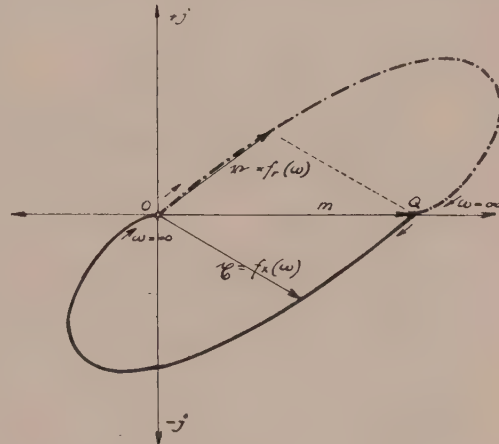


Abb. 11. Komplementäre Ortskurve.

Aber es gibt noch einen anderen Weg zur Stabilisierung, wie er in manchen Fällen noch rascher zum Ziele führt und wie er sich auch an dem vorliegenden Modell schön zeigen läßt.

Wie schon erwähnt, ergibt sich eine sichere Stabilisierung, wenn es gelingt, mit der Rückführgröße einen der Übergangsfunktion sozusagen komplementären Verlauf zu erzielen. Dies kommt auch hier zum Ausdruck, wenn man dem Rückführ-Vierpol einen genau komplementären Frequenzgang gegenüber dem Regelkreis verleiht. Abb. 11 zeigt dies anschaulich.  $F_1$  sei die Ortskurve des Regelkreises. Wünscht man nun, daß am Eingang des Verstärkers unabhängig von der Frequenz stets nur einheitlich der in der positiven reellen Achse liegende Vektor  $m$  auftritt, so muß

der Rückführ-Vierpol bei irgendeiner beliebigen Frequenz stets den Differenzvektor  $m - \tilde{x}$  liefern. Das ergibt aber genau das mit den Enden vertauschte Ortskurvenbild  $F_2$ , das gegenüber dem Original Ortskurvenbild des Regelkreises gerade um  $180^\circ$  gedreht erscheint.

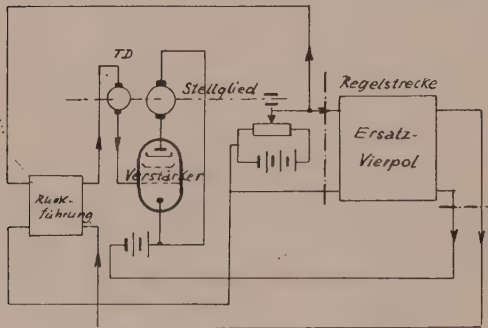


Abb. 12. Astatiches Modell.

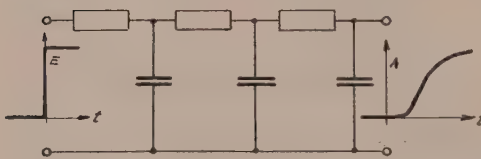


Abb. 13. R-C-Kette.

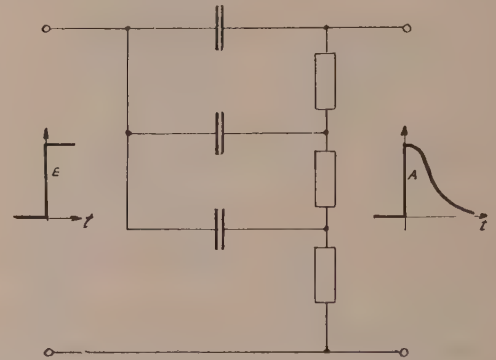


Abb. 14. Komplementärschaltung.

Diese Übereinstimmung der rein physikalisch gewonnenen Erkenntnis mit den eben abgeleiteten Grundsätzen der Ortskurventheorie ist recht erfreulich und sehr nützlich.

Wenn somit das Problem der Stabilisierung mit Hilfe der Modelltheorie ganz generell einfacher lösbar erscheint, so soll aber auch kurz darauf hingewiesen werden, daß man praktisch tatsächlich in der Lage ist, Regelkreise durch elektrische Vierpole nachzubilden und derartige Möglichkeiten erst kürzlich zur Schaffung eines Modellkraftwerkskomplexes am Institut für Starkstromtechnik an der Technischen Hochschule Wien<sup>1</sup> geführt haben, mit dem bereits schwierige Regelprobleme erfolgreich studiert werden konnten.

So gelang es auch, rein astatische Regelungen zu stabilisieren. Eine Regelung dieser Art ist eine Frequenzregelanlage, die mit dem obenerwähnten Modellkraftwerk untersucht wurde. Ein Ersatzschema des ganzen Regelkreises ist in Abb. 12 gezeigt. Die Regelstrecke enthält einen Antriebsmotor, der durch eine Röhrensteuerung des Feldes das Verhalten großer Wasserturbinen nachzubilden gestattet, sowie einen direkt gekoppelten Drehstromgenerator mit Frequenzmesser. Jede Frequenzabweichung bringt den Stellmotor (Stellglied) zum Anlaufen. Dieser stellt einen Schiebewiderstand so lange, bis die Abweichung praktisch verschwunden

<sup>1</sup> Durch Förderung des Ministeriums für Energiewirtschaft und Elektrifizierung im Jahre 1949 aufgebaut.



ist. Die Rückführung zeigt das komplementäre Verhalten der Regelstrecke. Zur Kompensation des Massenschwungmomentes des Stellmotors wird noch eine geschwindigkeitsproportionale Spannung aus einer Tourendynamo mit eingespeist.

Ersetzt man die Regelstrecke durch eine Kette von  $R$ - $C$ -Gliedern, wie in Abb. 13 gezeigt, so sieht die komplementäre Schaltung dazu wie in Abb. 14 aus, wie leicht einzusehen ist. So ist nach Festlegung der Regelstrecken-Ersatzschaltung nicht allzu schwer die Rückführschaltung anzugeben.

Wenn es auch schwierig ist, in so kleinem Rahmen das Verständnis für den Wert derartiger Modelltheorien zu wecken, so mag die Umreißung und Andeutung der wichtigsten Punkte vielleicht doch hier und dort eine Anregung gegeben und so das Interesse weiterer Kreise für einen Zweig der Technik erregt haben, dessen Bedeutung gerade im letzten Jahrzehnt in immer höherem Maße gestiegen ist und der noch viele ungelöste Probleme in sich birgt.

(Eingegangen am 8. März 1949.)

## Steifigkeit und Steifigkeitsmethode bei räumlichen Stabwerken\*.

Von L. Kirste und F. Müller-Magyari, Wien.

Mit 3 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Für eine bestimmte Klasse von räumlichen Stabverbindungen, welche aber sehr häufig in der Praxis auftreten, werden unter der Voraussetzung der Unverschieblichkeit der Knoten die entsprechenden Begriffe der ebenen Stabwerkstatik sinngemäß erweitert. An Stelle einer einzigen Steifigkeitszahl eines ebenen Knotens z. B. tritt nunmehr ein System von sechs Zahlen, genannt der (symmetrische) Steifigkeitstensor (in bezug auf eine räumliche infinitesimale Verdrehung) und unter konsequenter Verwendung der Tensorschreibweise gelingt es sogar, formelmäßig vollkommen analoge Beziehungen und Gleichungen für den weitergeleiteten Steifigkeitstensor und für die Knickbedingungen des Einzelstabes mit beliebigen räumlichen elastischen Einspannungen an den Stabenden sowie für den Durchlaufträger aufzustellen.

**Summary.** Notions concerning the statics of two-dimensional trusses are logically developed for a certain class of three-dimensional trusses, which are often employed in practical design, based on the assumption of non-shifting nodes. The stiffness factor, as known for a two-dimensional node, becomes a system of 6 numbers, called "stiffness tensor"—being a symmetrical one—which applies to infinitesimal rotation in the space. By adopting tensorial notation, perfectly analogous relations and equations are obtained for the "carry-over stiffness" tensor, for the crippling condition of a single bar with arbitrary, three-dimensional end restraint, as well as for a continuous bar.

**Résumé.** Les notions de la statique des treillis plans sont développées logiquement pour une certaine classe de treillis à trois dimensions, souvent employés dans la pratique, en conservant l'hypothèse que les nœuds ne se déplacent pas. Le coefficient de rigidité d'un nœud à deux dimensions devient alors un système de 6 nombres, appelé «tenseur de rigidité» — du type symétrique — qui se rapporte à une rotation infinitésimale dans l'espace. En adoptant la notation tensorielle, on arrive à des relations et des équations parfaitement analogues pour la «rigidité transmise», ainsi que pour les conditions de flambage d'une travée unique et d'une barre continue, compte tenu d'un encastrement élastique et tri-dimensionnel quelconque aux extrémités.

Räumliche Stabwerkverbindungen kommen bei Leitungsmasten und Funktürmen, im Hoch-, Brücken- und Kranbau vor, aber auch im Flugzeugbau werden sie trotz der modernen Schalenbauweisen noch immer stellenweise bei der Konstruktion der Rümpfe angewandt, ganz abgesehen von Motoraufhängungen, Befestigungen und Vorbauten und anderes mehr. Deshalb ist es nicht müßig, sich über allgemeinere Betrachtungen hinaus damit zu beschäftigen, ob und wie weit nicht auch bestimmte vereinfachende Verfahren, wie sie bei der Behandlung der ebenen Stabwerke üblich sind, auch in der Theorie der räumlichen Stabwerke mit Erfolg angewandt werden können, zumindest für gewisse große Klassen von räumlichen Fach- oder Rahmenwerken. Räumliche Stabwerke zeigen nämlich sehr oft wiederkehrende Bauweisen,

\* Herrn Prof. Dr. E. Melan zum 60. Geburtstag gewidmet.

symmetrische Anordnungen usw., häufig sind alle Stabquerschnitte gleich oder ähnlich, meistens werden Rohre oder kreiszylindrische Vollstäbe bevorzugt. Die folgende Arbeit beschäftigt sich nun mit einem häufig auftretenden Fall, nämlich mit dem in Abb. 1 gezeigten Durchlaufträger, welcher an verschiedenen Stellen räumlich gestützt wird, und zwar durch Stützstäbe, welche untereinander und mit dem Hauptstab vollkommen starr, das heißt ecksteif (z. B. geschweißt) verbunden sind. Die Stützstäbe seien kreiszylindrische Vollstäbe oder Rohre, besitzen also nach allen Richtungen hin das gleiche Trägheitsmoment, der Hauptstab kann ebenfalls ein kreiszylindrisches Rohr sein, es bietet aber keinerlei Schwierigkeiten, gleich den allgemeineren Fall eines

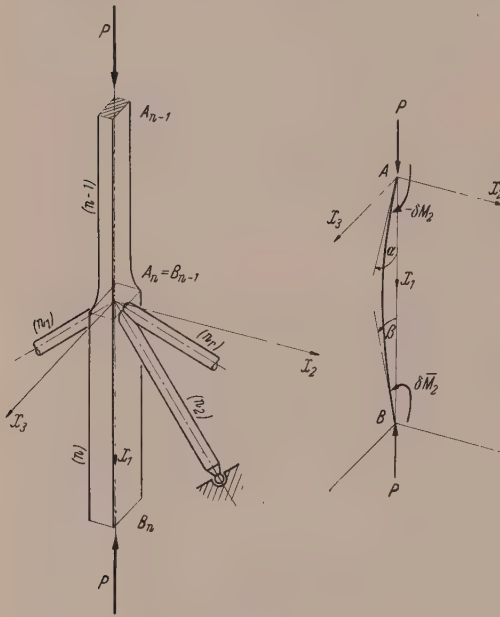


Abb. 1. Durchlaufträger mit räumlicher Stützung. Projektion des verformten Hauptstabes auf die  $(X_1, X_3)$ -Ebene.

doppelsymmetrischen Querschnittes zu behandeln. An den anderen Enden seien die Stützstäbe in vollkommenen Gelenken (Kugelgelenk) gelagert, aber auch hier bietet eine Erweiterung der Lagerbedingungen formelmäßig keine Schwierigkeiten (vgl. weiter unten). Dagegen wird vorerst in der folgenden Arbeit eine große prinzipielle Vereinfachung angenommen, nämlich daß sämtliche Knoten unverschieblich gehalten werden, das heißt sich nur räumlich verdrehen können. Diese Voraussetzung wurde deshalb angenommen, um die Untersuchungen systematisch zu entwickeln, daher wird mit dem einfacheren Fall begonnen. Es spielen aber tatsächlich bei vielen räumlichen Tragwerken, insbesondere bei der Ermittlung der Stabilitätsgrenze (wobei vorausgesetzt wird, daß die Berechnung der einzelnen Stabkräfte nach den üblichen Methoden der Statik bereits vorgenommen sei), die Knotenpunktverschiebungen im Augenblick des Ausknickens erst in zweiter Linie eine Rolle gegenüber den Knotenpunktverdrehungen.

Die rechnerische Behandlung hätte mit den üblichen Methoden der symbolischen Vektorrechnung erfolgen können, es wurde aber durchwegs die koordinatenmäßige Darstellung gewählt, wie sie etwa dem Lehrbuch von A. Duschek und A. Hochrainer<sup>1</sup> zugrunde liegt, um so mehr, als sich hierdurch äußerst übersichtliche Formelanalogen zur ebenen Stabwerkstatik ergeben.

### 1. Das Steifigkeitsellipsoid eines räumlichen Stabwerkknötens.

Wir betrachten nunmehr einen Knoten  $A$  des oben besprochenen Durchlaufträgers und legen nach Abb. 1 ein Koordinatensystem  $(X_1, X_2, X_3)$ , so daß  $X_1$  in Stablängsrichtung und  $X_2$  und  $X_3$  in Richtung der Hauptträgheitsachsen des Querschnitts weisen. Selten wird es vorkommen, daß von Stütze zu Stütze die Richtungen der Hauptträgheitsachsen wechseln, dagegen können sehr wohl die Größen der Hauptträgheitsmomente stückweise variieren. Zur Erleichterung der mechanischen Anschaulichkeit kann man sich am Punkt  $A$  ein vollkommen starres Knotenstück als befindlich denken und unterscheidet demnach dort

<sup>1</sup> A. Duschek und A. Hochrainer: Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung. Wien: Springer-Verlag, 1946.

- $\alpha$ ) das Stabende des Stabes  $(n - 1)$ ;
- $\beta$ ) das vollkommen starre Knotenstück  $(A_n)$ ;
- $\gamma$ ) das Anfangsstück des Stabes  $(n)$ ;
- $\delta$ ) die Gesamtheit  $(n_1), (n_2), (n_3) \dots (n_r) \dots$  aller Stützstäbe, welche im Knoten  $A_n$  anschließen.

Wir betrachten vorläufig nur den Anteil  $\delta$  der Stützstäbe und untersuchen die Wirkung einer räumlichen infinitesimalen Drehung des Knotenstückes auf die Gesamtheit der Stützstäbe. Infolge dieser infinitesimalen Drehung, welche durch den Drehvektor  $\delta D_i$  gegeben sei, werden in den Stützstäben Kräfte und Momente hervorgerufen. Nach der obigen Näherungsannahme brauchen wir nur die Momente zu berücksichtigen, da die Kräfte ohnedies am unverschieblichen festen Lager abgesetzt werden. Jeder Stützstab erleidet eine ebene Biegeverformung, aber keine Drillbeanspruchung, weil das andere Ende vollkommen gelenkig gelagert ist. Seien  $\vec{S}_i$  die Koordinaten des Einheitsvektors in Richtung des  $r$ -ten Stützstabes (vom Knoten weggerichtet), so ist

$$\vec{S}_i = \frac{\vec{X}_i}{l_r} \quad (1)$$

( $\vec{X}_i$  Koordinaten des anderen Endpunktes [Gelenk];  $l_r$  Länge des  $r$ -ten Stützstabes) (für die nächsten Rechnungen kann der Index „ $n$ “, also die Kennzeichnung des Knotens wegfallen, weil nur ein Knoten betrachtet wird und so eine Verwechslung ausgeschlossen ist) und nach der räumlichen Drehung weist dieser Vektor nach der Richtung

$$\vec{T}_i = \vec{S}_i - \varepsilon_{ijk} \vec{S}_j \delta D_k, \quad (2)$$

wobei  $\varepsilon_{ijk}$  den Einheitstensor 3. Stufe bedeutet. Die Biegeverformung des  $r$ -ten Stützstabes spielt sich nun in der Ebene der Vektoren  $\vec{S}_i$  und  $\vec{T}_i$  ab (Abb. 2) und es ist in bekannter Weise

$$|\delta \vec{M}_i| = |\vec{k}| \cdot |\delta \beta| \quad (3)$$

die absolute Größe des Endmomentes,  $\vec{k}$  nennen wir die Knotensteifigkeit des  $r$ -ten Stützstabes und sie beträgt beim Vorhandensein einer Axialkraft  $P$  im Stützstab und unter Berücksichtigung des Gelenkes am anderen Ende

$$\vec{k} = \frac{\vec{k}_0}{C_2}; \quad (4)$$

$\vec{k}_0 = \frac{3(EJ)_r}{l_r}$  Eigensteifigkeit des  $r$ -ten Stützstabes)

$$C_2 = \frac{3}{\varphi_r^2} \left( 1 - \frac{\varphi_r}{\operatorname{tg} \varphi_r} \right); \quad \varphi_r = \sqrt{\frac{P_r}{(EJ)_r}} \cdot l_r;$$

Im Grenzfall einer fehlenden Axialkraft  $P_r = 0$ , ist  $C_2 = 1$ , das heißt  $\vec{k} = \vec{k}_0$ . Ist der Stützfuß z. B. vollkommen starr eingespannt, aber verdrehweich gelagert, so ist die Steifigkeit am Knoten

$$\vec{k} = \frac{\vec{k}_0 C_2}{C_3}. \quad (5)$$

(Über die entsprechenden Formeln bei elastischer Einspannung und über die numerischen Werte der transzendenten Funktionen  $C_2$  und  $C_3$  usw. vgl. man etwa<sup>2</sup>.)

<sup>2</sup> L. Kirste: Momentenverteilungs- und Stabilitätsrechnung nach der Steifigkeitsmethode. Österr. Ingenieur-Arch. 1, H. 1/2, 117.



Weil wir nun ein Moment als positiv bezeichnen, welches in Richtung der Drehung von  $\vec{S}_i$  nach  $\vec{T}_i$  durch den Winkel  $\delta\beta$  dreht, dann aber von einer negativen Einspannung des Stützstabes sprechen (im üblichen Sprachgebrauch ist ein Stab positiv eingespannt, wenn das Aktionsmoment auf dem Stab entgegengesetzt der Drehung der Anfangstangente des Stabes wirkt), so setzen wir für den Momentenvektor  $\delta\vec{M}_i$  an (siehe Abb. 2):

$$\delta\vec{M}_i = -k \varepsilon_{ijk} \vec{S}_j \vec{T}_k \quad (6)$$

und erhalten mit (2) und nach Anwendung des sogenannten Entwicklungssatzes

$$\begin{aligned} \delta\vec{M}_i &= -k \varepsilon_{ijk} \vec{S}_j (\vec{S}_k - \varepsilon_{klm} \vec{S}_l \cdot \delta D_m) = k (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{S}_j \vec{S}_l \delta D_m = \\ &= k [(\vec{S}_j \delta D_j) \vec{S}_i - 1 \cdot \delta D_i]; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

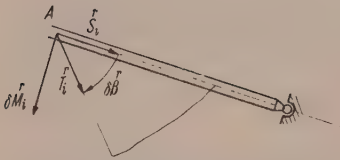


Abb. 2. Ebene Biegeverformung des  $r$ -ten Stützstabes infolge einer räumlichen Drehung  $\delta D_i$  des Knotens A.

Das resultierende (infinitesimale) Moment ergibt sich durch Summierung über alle Stützstäbe, welche an einem Knoten anschließen und beträgt

$$\begin{aligned} \delta M_i &= \sum \delta\vec{M}_i = K_{ij} \cdot \delta D_j \\ &\text{über alle Stützstäbe eines Knotens} \\ K_{ij} &= \sum_r k \vec{S}_i \vec{S}_j - \delta_{ij} \sum_r k. \end{aligned} \quad (8)$$

Betrachten wir nun einen Einzelstab, welcher am Anfang und am Ende je durch eine Anzahl von Stützstäben gestützt wird (unverschieblich natürlich, wie vorausgesetzt), so ruft eine räumliche Drehung der Anfangs- bzw. Endstücke Aktionsmomente auf dem Hauptstab hervor, welche gleich groß, aber entgegengesetzt wirken, wie eben errechnet, es gilt also:

$$\begin{aligned} \delta M_i &= -K_{ij} \delta D_j & \text{für } X_1 = 0, \\ \delta M_i &= -K_{ij} \delta D_j & \text{für } X_1 = l. \end{aligned} \quad (9)$$

Man kann dann die Stützstäbe überhaupt wegdenken und an ihrer Stelle eine elastische räumliche Einspannung setzen, ganz analog der ebenen Stabwerkstatik, wobei aber an Stelle einer einzigen kennzeichnenden Einspannzahl (Steifigkeitszahl des ebenen Knotens) an jedem Ende

$$k_A = \frac{M_A}{\alpha}; \quad k_B = \frac{M_B}{\beta} \quad (10)$$

( $\alpha, \beta$  Winkel der Endtangente an den verformten Stab mit der ursprünglichen Stabachse;  $M_A, M_B$  Endmomente, wirkend auf den Hauptstab) nunmehr ein ganzer Tensor tritt, welchen wir den „Steifigkeitstensor“ nennen wollen. Er ist symmetrisch und von 2. Stufe, das heißt durch sechs Größen angebbar. Für ihn gelten die üblichen Sätze, insbesondere z. B.: Ist  $\delta D_j$  ein Einheitsvektor, so liegen die Endpunkte der Vektoren  $\delta M_i$  auf einer Mittelpunktsfläche 2. Grades (mit dem Mittelpunkt A)

$$\frac{U_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{U_2^2}{\lambda_2^2} + \frac{U_3^2}{\lambda_3^2} = 1, \quad (11)$$

deren Hauptachsen in die Eigenrichtungen von  $K_{ij}$  fallen und deren Achsenlängen mit den Eigenwerten  $\lambda_i$  übereinstimmen, also eine völlig sinngemäße Erweiterung der elementaren Beziehung (10). Wir wollen die Fläche (11) das „Steifigkeits-ellipsoid“ des Stützknosens A nennen. Man kann nach den mechanischen Deutungen

der Entartungserscheinungen von  $K_{ij}$  fragen oder auch umgekehrt, gewisse mechanische Sonderfälle annehmen und die zugehörige Form von  $K_{ij}$  ermitteln. Hier sollen nur zwei Sonderfälle betrachtet werden, und zwar:

a) Ist der Hauptstab an der Stütze vollkommen verdrehweich gelagert, z. B. hülsenartig im Knotenstück befestigt, so kann vom Knotenstück her kein Drehmoment um die Stab längsachse ( $X_1$ -Achse) auf den Stab übertragen werden.  $K_{ij}$  wird dann einfach singulär von der Form:

$$K_{ij} \text{ (Hülsenbefestigung)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ 0 & K_{23} & K_{33} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

In einem solchen Fall sprechen wir dann verständlicherweise nur von einer Steifigkeitsellipse, welche in der zu  $X_1$  senkrechten Ebene durch  $A$ , also in der  $(X_2, X_3)$ -Ebene liegt. Für dieses Stabende liegt dann, anschaulich gesprochen, einfach die schiefe Biegung vor, aber selbst wenn alle Stützpunkte hülsenförmig gelagert sind, so brauchen die einzelnen Momentenvektoren nicht nach derselben Richtung zu weisen, so daß für den gesamten Stab trotzdem eine räumliche Verformung auftritt.

b) Wir betrachten einen Einzelstab oder Durchlaufträger, welcher diesmal nicht verdrehweich angeschlossen sei, die Stützstäbe jedoch mögen alle zur Stab längsachse ( $X_1$ -Achse) senkrecht stehen (Hauptgurt eines Flugzeugrumpfes, Eckträger eines Gittermastes usw.). Es ist dann  $\bar{S}_1 = 0$  für alle Stützstäbe und nach (8) erkennt man, daß  $K_{ij}$  folgende Form besitzt:

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} -\sum k & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ 0 & K_{23} & K_{33} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Man erkennt, wie es plausibel ist, daß gegenüber einer Verdrehung des Hauptstabes um seine Längsachse im Knoten  $A$  die Summe aller Biegesteifigkeiten der dort angreifenden Stützstäbe Widerstand leistet [wenn die Stützstäbe frei von axialen Beanspruchungen sind, im allgemeinen Fall vgl. man (4) und (5)]. Das Steifigkeitsellipsoid besitzt dann bereits die  $X_1$ -Achse als eine Hauptachse. Im weiteren Sonderfall, wo nur zwei Stützstäbe in Richtung der Hauptträgheitsachsen liegen, fallen auch noch die gemischten Steifigkeitsglieder weg und der Tensor  $K_{ij}$  wird dann besonders einfach, was sich auch später in einem Zerfallen der Knickbedingung äußert.

Als einfaches Beispiel sei die Stabilität einer  $r$ -stäbigen Pyramide nach Abb. 3 untersucht, wenn eine beliebige Einzelkraft  $\vec{P}_i$  an der Pyramidenspitze angreift. Dort seien die Stützstäbe untereinander ecksteif verbunden, während die Füße in vollkommenen Gelenken lagern [über andere Randbedingungen vgl. oben (5)]. Für die Ermittlung der einzelnen Stabkräfte infolge der äußeren Belastung  $\vec{P}_i$  kann man näherungsweise so rechnen, indem man an der Pyramidenspitze ein ideales Gelenk annimmt, das heißt für die Kräfteermittlung wird der Einfluß der Knotensteifigkeiten der einzelnen Stützstäbe gegenüber ihren Dehnsteifigkeiten vernachlässigt. Infolge einer Verschiebung  $V_i$  der Pyramidenspitze werden sich die einzelnen Stablängen ändern und dadurch Stabkräfte hervorgerufen, deren Größen  $\vec{P}$  sich folgendermaßen berechnen:

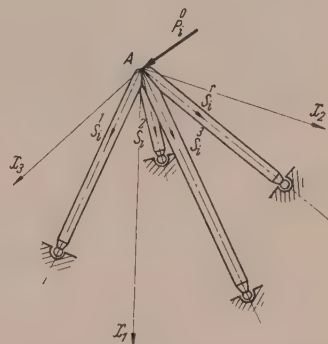


Abb. 3. Stabilität einer  $r$ -stäbigen Pyramide unter Einzelkraftbeanspruchung.

$$\overset{r}{P} = \overset{r}{f} \left( -X_j V_j + \frac{1}{2} V_j V_j \right), \quad (14)$$

$\overset{r}{f} = \frac{(EF)_r}{l_r} \dots$  Dehnsteifigkeit des  $r$ -ten Stützstabes.

Der Klammerausdruck ist ein Skalar, und zwar positiv bei Zugbeanspruchung und negativ bei Druck. Unter der Voraussetzung einer kleinen Knotenpunktverschiebung  $|V_i|$  vernachlässigt man im allgemeinen das zweite Glied in (14) und man erhält dann für die drei unbekannten Komponenten der Verschiebung  $V_j$  folgende drei lineare Gleichungen:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{P}_i &= F_{ij} V_j, \\ F_{ij} &= \sum_r \overset{r}{f} \overset{r}{S}_i \overset{r}{S}_j. \end{aligned} \quad (15)$$

Ist

$$V_j = F_{ji}^{-1} \overset{\circ}{P}_i \quad (16)$$

die Lösung, so folgt für die Größe der Stabkraft

$$\overset{r}{P} = -\overset{r}{f} \overset{r}{S}_j F_{ji}^{-1} \overset{\circ}{P}_i. \quad (17)$$

Die Stabilitätsbedingung ist in einigen Zeilen erledigt: Wächst die äußere Kraft  $\overset{\circ}{P}_i$  von Null beginnend stetig an, so stehen auch die Stabkräfte untereinander und zur äußeren Kraft in einem ganz bestimmten Verhältnis. Bei einer gewissen kritischen Last  $P_{i,K}$  wird das Gleichgewicht indifferent, das heißt zu einer infinitesimalen räumlichen Dehnung des Knotenstückes ist kein Arbeitsaufwand erforderlich, es ist

$$\delta M_i = K_{ij} \delta D_j = 0 \text{ (Nullvektor)} \quad (18)$$

und diese drei linearen homogenen Gleichungen besitzen dann und nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Gleichungsdeterminante verschwindet.

$$|K_{ij}| = 0 \quad (19)$$

liefert also die Knickbedingung. Die einzelnen Glieder berechnen sich nach (8), wobei die Knotensteifigkeiten  $\overset{r}{k}$  der einzelnen Stützstäbe nach (4) bzw. (5) mit den Kräften  $\overset{r}{P}$  nach (17) einzusetzen sind.

## 2. Der axial gedrückte Einzelstab bei beliebigen räumlichen elastischen Einspannungen an den Enden.

Als Vorstufe zu dem allgemeineren Problem des Durchlaufträgers mit räumlicher Stützung unter axialer Druckbeanspruchung sei zuerst das entsprechende Problem für den Einzelstab behandelt. Die beiden elastischen räumlichen Einspannungen an den Enden des Stabes seien etwa durch ihre zugehörigen Steifigkeitsellipsoide  $E^2$  bzw.  $\bar{E}^2$  gegeben, oder durch die Tensoren  $K_{ij}$  bzw.  $\bar{K}_{ij}$  [siehe Gl. (9)]. Praktisch läßt sich jede beliebige vorgegebene räumliche elastische Einspannung durch drei aufeinander senkrechte entsprechend steife Stützstäbe (Rohre) verwirklichen. Die Koordinatenrichtungen werden wieder wie in Abb. 1 angenommen. Im Augenblick des Ausknickens erleidet der Stab eine unendlich kleine (virtuelle) Verformung, wobei jeder Querschnitt senkrecht zur Stablängsachse eine Verschiebung, gegeben durch  $\delta X_2 = \delta X_2(X_1)$  und  $\delta X_3 = \delta X_3(X_1)$ , und eine Verdrehung um den Schwerpunkt  $S$  des Querschnittes, gegeben durch  $\delta D_1 = \delta D_1(X_1)$ , ausführt. Für diese ganz bestimmten virtuellen Verrückungen gelten in unserem Falle die bekannten Differentialgleichungen



$$\begin{aligned}
E C \cdot \delta D_1^{\text{IV}} + \left( P \frac{J_p}{F} - G J_T \right) \cdot \delta D_1^{\text{II}} &= 0, \\
(E J)_3 \cdot \delta X_2^{\text{IV}} + P \cdot \delta X_2^{\text{II}} &= 0, \\
(E J)_2 \cdot \delta X_3^{\text{IV}} + P \cdot \delta X_3^{\text{II}} &= 0
\end{aligned} \tag{20}$$

und es bedeuten:

$$\left. \begin{aligned}
P &\text{ Druckkraft;} \\
F &\text{ Querschnittsfläche;} \\
(E J)_2, (E J)_3 &\text{ Biegesteifigkeiten, bezogen auf die entsprechenden Haupt-} \\
&\text{ trägheitsachsen;} \\
J_p &\text{ polares Trägheitsmoment (um } S\text{);} \\
G J_T &\text{ Saint-Venantsche Verdrehsteifigkeit;} \\
E C &\text{ Wölbsteifigkeit (bezogen auf den Schwerpunkt als Schubmittel-} \\
&\text{ punkt, wegen der doppelten Symmetrie), } C = \int_F w^2 dF; \\
w &\text{ Einheitsverwölbung.}
\end{aligned} \right\} \tag{21}$$

Die Lösungen von (20) lauten:

$$\begin{aligned}
(X_1 = x) \\
\delta D_1 &= A_1 \sin \omega_1 x + A_2 \cos \omega_1 x + A_3 x + A_4; \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{P \frac{J_p}{F} - G J_T}{E C}}; \\
\delta X_2 &= B_1 \sin \omega_3 x + B_2 \cos \omega_3 x + B_3 x + B_4; \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{P}{(E J)_3}}; \\
\delta X_3 &= C_1 \sin \omega_2 x + C_2 \cos \omega_2 x + C_3 x + C_4; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{P}{(E J)_2}}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Anstatt diese Lösungen nun in den 12 Randbedingungen des räumlich gelagerten Stabes einzusetzen und so ein lineares homogenes Gleichungssystem für die Integrationskonstanten zu bekommen, woraus die Knickbedingung durch Nullsetzen der Gleichungsdeterminante erfolgt, wählt man in der Steifigkeitsmethode einen formal anderen Weg, indem man unter Berücksichtigung der Unverschieblichkeit der Stabenden für

$$X_1 = 0 \quad \text{und} \quad X_1 = l: \delta X_2 = \delta X_3 = 0 \tag{23}$$

einen Zusammenhang zwischen den Aktionsendmomenten, welche auf den Stab wirken, und den Verdrehungen der Stabenden sucht. Bezeichnen wir wie üblich ein wirkendes Moment als positiv, wenn der zugehörige Vektor in die positive Koordinatenrichtung fällt, analog für die Stabendverdrehungen („jene Drehungen durch die Winkel, um die man die positive  $X_1$ -Achse drehen muß, damit sie mit den orientierten Anfangs- bzw. Endtangenten des Stabes zur Deckung kommen“) und werden alle Größen für das Stabende  $B$  ( $X_1 = l$ ) durch einen Querstrich gekennzeichnet, so erhält man z. B. für die  $(X_1, X_3)$ -Projektionsebene (vgl. auch Abb. 1):

$$\begin{aligned}
\alpha = \delta X_3^{\text{I}} &= -\delta D_2 = \frac{1}{k_2} \left( C_{2(2)} \cdot \delta M_2 + \frac{C_{1(2)}}{2} \cdot \delta \bar{M}_2 \right), \\
\beta = -\delta \bar{X}_3^{\text{I}} &= \delta \bar{D}_2 = \frac{1}{k_2} \left( -\frac{C_{1(2)}}{2} \cdot \delta M_2 + C_{2(2)} \cdot \delta \bar{M}_2 \right),
\end{aligned}$$

das heißt:

$$\left. \begin{aligned}
\delta D_2 &= \frac{1}{k_2} \left( C_{2(2)} \cdot \delta M_2 - \frac{C_{1(2)}}{2} \cdot \delta \bar{M}_2 \right), \\
\delta \bar{D}_2 &= \frac{1}{k_2} \left( -\frac{C_{1(2)}}{2} \cdot \delta M_2 + C_{2(2)} \cdot \delta \bar{M}_2 \right)
\end{aligned} \right\} \tag{24}$$

und entsprechend für die  $(X_1, X_2)$ -Projektionsebene:

$$\left. \begin{aligned} \delta D_3 &= \frac{1}{\overset{\circ}{k}_3} \left( C_{2(3)} \cdot \delta M_3 - \frac{C_{1(3)}}{2} \cdot \delta \bar{M}_3 \right), \\ \delta D_3 &= \frac{1}{\overset{\circ}{k}_3} \left( -\frac{C_{1(3)}}{2} \cdot \delta M_3 + C_{2(3)} \cdot \delta \bar{M}_3 \right). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Dabei bedeuten

$$\overset{\circ}{k}_2 = \frac{3(EJ)_2}{l}, \quad \overset{\circ}{k}_3 = \frac{3(EJ)_3}{l}$$

die Eigensteifigkeiten des Hauptstabes bei Biegung um die entsprechenden Achsen,

$$\left. \begin{aligned} C_{1(i)} &= \frac{6}{\varphi_i^2} \left( \frac{\varphi_i}{\sin \varphi_i} - 1 \right); & \varphi_i &= \omega_i l \\ C_{2(i)} &= \frac{3}{\varphi_i^2} \left( 1 - \frac{\varphi_i}{\tan \varphi_i} \right); & \omega_i &= \sqrt{\frac{P}{(EJ)_i}} \end{aligned} \right\} i = 2, 3. \quad (26)$$

(Die transzendenten Hauptfunktionen  $C_{1(i)}$  und  $C_{2(i)}$ ,  $i = 2, 3$ , wurden mit Koeffizienten 3 und 6 versehen, gegenüber den gewöhnlichen Anschreibungen, damit sie für  $\varphi_i = 0$  den Wert 1 ergeben.)

Mit (23), (24) und (25) sind bereits 8 Randbedingungen erledigt, wenn man bedenkt, daß zwischen  $\delta D_i$  und  $\delta M_i$  bzw. den gestrichenen Größen die Relationen (9) bestehen, es fehlen noch die 4 Randbedingungen, welche zur virtuellen Verdrehung  $\delta D_1 = \delta D_1(X_1)$  gehören. Zwei davon kann man in der Form anschreiben:

$$\left. \begin{aligned} \delta M_1 &= - \left( G J_T \cdot \delta D_1^I - E C \cdot \delta D_1^{III} \right)_{x_1=0}, \\ \delta \bar{M}_1 &= \left( G J_T \cdot \delta D_1^I - E C \cdot \delta D_1^{III} \right)_{x_1=l}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

während zwei andere Beziehungen sich auf das wölbelastische Verhalten am oberen und unteren Stabende beziehen. Hier kann man z. B. ansetzen:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{k_w}{l} \cdot \delta D_1^I + \delta D_1^{II} \right)_{x_1=0} &= 0 \\ \left( \frac{\bar{k}_w}{l} \cdot \delta D_1^I - \delta D_1^{II} \right)_{x_1=l} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

wo  $k_w$  und  $\bar{k}_w$  als wölbelastische Einspannziffern eingeführt werden, welche auch noch gegeben sein müssen, für  $k_w = 0$  liegt wölbfreie Lagerung vor, dagegen für  $k_w = \infty$  vollkommen wölbesteife (wölbbehinderte) Lagerung. (27) und (28) sind vier Gleichungen, welche aber als Unbekannte nur die drei Integrationskonstanten  $A_1, A_2, A_3$  enthalten, es muß deshalb eine Beziehung zwischen  $\delta M_1, \delta \bar{M}_1, k_w, \bar{k}_w$  bestehen. Im allgemeinen bietet die exakte Lösung mit Berücksichtigung der Wölbelastizität und der Knickkraft  $P$  große numerische Schwierigkeiten und es ist deshalb vorteilhafter, nur nach der elementaren Theorie der Torsion zu rechnen, den Einfluß der Verwölbung aber in Form eines empirischen Faktors  $\kappa$  im Ausdruck für die Saint-Venantsche Verdrehsteifigkeit zu berücksichtigen. Es ist dann in bekannter Weise

$$\begin{aligned} \delta M_1 + \delta \bar{M}_1 &= 0, \\ \delta \bar{D}_1 &= \frac{\kappa l}{G J_T} \cdot \delta \bar{M}_1 + \delta D_1, \\ \overset{\circ}{k}_1 &= \frac{G J_T}{\kappa l} \end{aligned} \quad (29)$$

[Eigen(torsions)steifigkeit des Stabes,  $\kappa \leq 1$ ]. Für kreiszyindrische Vollstäbe und Rohre ist exakt  $\kappa = 1$  und für andere Querschnittsformen ist die obige Näherung ohne weiteres anwendbar, solange die Stäbe nicht zu kurz und gedrungen sind.

Setzt man in (24), (25) und (29) die gegebenen Relationen (9) ein, so erhält man sechs lineare homogene Gleichungen für die  $\delta D_i$  bzw.  $\delta D_i$ , deren Gleichungsdeterminante die gewünschte Knickbedingung des allgemein räumlich elastisch eingespannten Stabes unter axialer Druckbeanspruchung ergibt. Wir verzichten auf die ausführliche Anschreibung, weil weiter unten eine noch einfachere Form dieser Knickbedingung gefunden werden wird.

Die Gl. (24), (25) und (29) können noch formal umgeschrieben werden, wodurch sich eine Form ergibt, welche im nächsten Kapitel zur Herleitung des „weitergeleiteten Steifigkeitstensors“ gebraucht wird. Sie lauten in der neuen Schreibweise:

$$\left. \begin{aligned} \delta \bar{D}_1 &= \delta D_1 - \frac{1}{\overset{\circ}{k}_1} \delta M_1, \\ \delta \bar{D}_2 &= \frac{1}{\overset{\circ}{k}_2} \left[ -\frac{C_{1(2)}}{2} \cdot \delta M_2 + C_{2(2)} \left( \frac{2 \overset{\circ}{C}_{2(2)}}{C_{1(2)}} \cdot \delta M_2 - \frac{2 \overset{\circ}{k}_2}{C_{1(2)}} \cdot \delta D_2 \right) \right], \\ \delta \bar{D}_3 &= \frac{1}{\overset{\circ}{k}_3} \left[ -\frac{C_{1(3)}}{2} \cdot \delta M_3 + C_{2(3)} \left( \frac{2 \overset{\circ}{C}_{2(3)}}{C_{1(3)}} \cdot \delta M_3 - \frac{2 \overset{\circ}{k}_3}{C_{1(3)}} \cdot \delta D_3 \right) \right] \\ \delta \bar{M}_1 &= -\delta M_1, \\ \delta \bar{M}_2 &= -\frac{2 \overset{\circ}{k}_2}{C_{1(2)}} \cdot \delta D_2 + \frac{2 \overset{\circ}{C}_{2(2)}}{C_{1(2)}} \cdot \delta M_2, \\ \delta \bar{M}_3 &= -\frac{2 \overset{\circ}{k}_3}{C_{1(3)}} \cdot \delta D_3 + \frac{2 \overset{\circ}{C}_{2(3)}}{C_{1(3)}} \cdot \delta M_3 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

oder abgekürzt

$$\left. \begin{aligned} \delta \bar{D}_i &= -A_{ij} \cdot \delta D_j + B_{ij} \cdot \delta M_j, \\ \delta \bar{M}_i &= -C_{ij} \cdot \delta D_j + A_{ij} \cdot \delta M_j, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

mit den speziellen Tensoren

$$\left. \begin{aligned} A_{ij} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2 \overset{\circ}{C}_{2(2)}}{C_{1(2)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2 \overset{\circ}{C}_{2(3)}}{C_{1(3)}} \end{pmatrix}; & C_{ij} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2 \overset{\circ}{k}_2}{C_{1(2)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2 \overset{\circ}{k}_3}{C_{1(3)}} \end{pmatrix}; \\ B_{ij} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\overset{\circ}{k}_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\overset{\circ}{k}_2} \frac{\overset{\circ}{C}_{2(2)}}{C_{1(2)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\overset{\circ}{k}_3} \frac{\overset{\circ}{C}_{2(3)}}{C_{1(3)}} \end{pmatrix}; & C_{3(i)} &= \frac{-C_{1(i)}^2}{4} + C_{2(i)}^2; \\ & & & i=2, 3. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Setzen wir nun die Beziehungen (9) in (31) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta \bar{D}_i &= -A_{ij} \cdot \delta D_j - B_{ij} K_{jk} \cdot \delta D_k, \\ \delta \bar{M}_i &= -\bar{K}_{ij} \delta \bar{D}_j = -C_{ij} \cdot \delta D_j - A_{ij} K_{jk} \cdot \delta D_k \end{aligned}$$

und wenn wir die erste Gleichung umbezeichnen:

$$\delta \bar{D}_j = -(A_{jl} + B_{jk} K_{kl}) \delta D_l,$$

und in die zweite einsetzen:

$$\bar{K}_{ij} (A_{jl} + B_{jk} K_{kl}) \delta D_l = (-C_{il} - A_{ij} K_{jl}) \cdot \delta D_l$$



also schließlich

$$(C_{il} + A_{ij} K_{jl} + \bar{K}_{ij} A_{jl} + \bar{K}_{ij} B_{jk} K_{kl}) \cdot \delta D_l = 0. \quad (33)$$

Diesmal erhält man die allgemeine Knickbedingung in Form einer dreireihigen Determinante:

$$|C_{il} + A_{ij} K_{jl} + \bar{K}_{ij} A_{jl} + K_{ij} B_{jk} K_{kl}| = 0 \quad (34)$$

und man erkennt, wie einfach sich die gewöhnliche ebene Knickbedingung eines beiderseits elastisch eingespannten Stabes unter Druckbeanspruchung nun im allgemeineren räumlichen Fall durch die tensorielle Schreibweise in der Gl. (34) widerspiegelt. Die ebene Knickbedingung lautet bekanntlich ( $k_A$ ,  $k_B$ , Einspannziffern, man vgl. Anm. 2):

$$\overset{\circ}{k} + C_2 (k_A + k_B) + C_3 \cdot \frac{k_A \cdot k_B}{\overset{\circ}{k}} = 0.$$

### 3. Der Durchlaufträger unter axialer Beanspruchung. Steifigkeitsmethode.

Nach den eben abgeleiteten Ergebnissen über den Einzelstab mit beliebigen räumlichen elastischen Einspannungen an den Enden und dem Begriff des Steifigkeitstensors  $K_{ij}$  einer Anzahl von Stützstäben, welche an einem Knoten angreifen, läßt sich die Steifigkeitsmethode der ebenen Stabwerke fast wörtlich und auch formelmäßig auf räumliche Probleme übertragen, wenn man sich nur konsequent der tensoriellen Schreibweise bedient. Wir betrachten zwei aufeinanderfolgende Teilstäbe des Durchlaufträgers (Abb. 1), welche durch  $(n-1)$  bzw.  $(n)$  signiert seien. Eine räumliche infinitesimale Verdrehung des Stabendes  $B_{n-1}$ , gegeben durch den

Drehvektor  $\overset{(n-1)}{\delta D_i}$  (der Querstrich zeigt immer an, daß es sich um ein Stabende,  $X_1 = l$ , handelt), induziert ein Aktionsmoment auf den Stab, gegeben durch  $\overset{(n-1)}{\delta \bar{M}_i}$ , und zwischen beiden Vektoren bestehe der Zusammenhang

$$\overset{(n-1)}{\delta \bar{M}_i} = \overset{(n-1)}{S_{ij}} \cdot \overset{(n-1)}{\delta D_j}, \quad (35)$$

wobei wir  $\overset{(n-1)}{S_{ij}}$  als „Anschlußsteifigkeitstensor“ bezeichnen. Dieselbe Drehung ruft in der Gesamtheit der Stützstäbe ein resultierendes Moment

$$\overset{(A_n)}{\delta \bar{M}_i} = \overset{(A_n)}{K_{ij}} \cdot \overset{(A_n)}{\delta D_j} \quad (36)$$

hervor und aus beiden folgt für das Anfangsstück des Stabes  $(n)$

$$\overset{(n-1)}{\delta \bar{M}_i} + \overset{(A_n)}{\delta \bar{M}_i} + \overset{(n)}{\delta \bar{M}_i} = 0, \quad \overset{(n-1)}{\delta D_i} = \overset{(A_n)}{\delta D_i} = \overset{(n)}{\delta D_i},$$

das heißt

$$\overset{(n)}{\delta \bar{M}_i} = - \left( \overset{(n-1)}{S_{ij}} + \overset{(A_n)}{K_{ij}} \right) \cdot \overset{(n)}{\delta D_j}. \quad (37)$$

Nach den Formeln (31) gelten dann für das untere Ende des Stabstückes  $(n)$

$$\left. \begin{aligned} \overset{(n)}{\delta \bar{D}_i} &= - A_{ij} \cdot \overset{(n)}{\delta D_j} - B_{ij} \left( \overset{(n-1)}{S_{jk}} + \overset{(A_n)}{K_{jk}} \right) \cdot \overset{(n)}{\delta D_k}, \\ \overset{(n)}{\delta \bar{M}_i} &= - C_{ij} \cdot \overset{(n)}{\delta D_j} - A_{ij} \left( \overset{(n-1)}{S_{jk}} + \overset{(A_n)}{K_{jk}} \right) \cdot \overset{(n)}{\delta D_k} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

und für den „weitergeleiteten Steifigkeitstensor“  $\overset{(n)}{S_{ij}}$

$$\overset{(n)}{\delta \bar{M}_i} = \overset{(n)}{S_{ij}} \cdot \overset{(n)}{\delta D_j} \quad (39)$$

folgt also, nachdem man zuerst die erste Gleichung von (38) wieder umbezeichnet hat,

$$\delta \bar{D}_j = - \left[ A_{jl} + B_{jk} \left( \overset{(n-1)}{S_{kl}} + \overset{(A_n)}{K_{kl}} \right) \right] \cdot \delta D_l$$

und in die zweite eingesetzt hat,

$$\begin{aligned} \overset{(n)}{\bar{S}}_{ij} \left[ A_{jl} + B_{jk} \left( \overset{(n-1)}{S_{kl}} + \overset{(A_n)}{K_{kl}} \right) \right] \cdot \delta D_l = \\ = \left[ C_{il} + A_{ij} \left( \overset{(n-1)}{S_{jl}} + \overset{(A_n)}{K_{jl}} \right) \right] \cdot \delta D_l \end{aligned}$$

oder abgekürzt

$$\overset{(n)}{\bar{S}}_{ij} \cdot \overset{(n)}{V}_{jl} = \overset{(n)}{U}_{il}, \text{ d. h. } \overset{(n)}{\bar{S}}_{ij} = \overset{(n)}{U}_{il} \cdot \overset{(n)}{V}_{lj}^{-1} \quad (40)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \overset{(n)}{U}_{il} &= C_{il} + A_{ij} \left( \overset{(n-1)}{S_{jl}} + \overset{(A_n)}{K_{jl}} \right), \\ \overset{(n)}{V}_{jl} &= A_{jl} + B_{jk} \left( \overset{(n-1)}{S_{kl}} + \overset{(A_n)}{K_{kl}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Die Analogie mit den speziellen Formeln der ebenen Stabwerkstatik ist vollkommen.

Für den Anfangsstab (1) ist insbesondere  $\overset{(0)}{\bar{S}}_{ij} = 0$  (Nulltensor) und daher

$$\left. \begin{aligned} \overset{(1)}{U}_{il} &= C_{il} + A_{ij} \overset{(A_1)}{K_{jl}}, \\ \overset{(1)}{V}_{jl} &= A_{jl} + B_{jk} \overset{(A_1)}{K_{kl}}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Rechnet man vom anderen Ende des Durchlaufträgers her, so erhält man unter der Voraussetzung, daß der Anschlußsteifigkeitstensor  $\overset{(n+1)}{S}_{ij}$  bekannt sei, für den weitergeleiteten Tensor  $\overset{(n)}{S}_{ij}$

$$\left[ A_{ik} + \left( \overset{(n+1)}{S}_{ij} + \overset{(A_{n+1})}{K_{ij}} \right) \cdot B_{jk} \right] \cdot \overset{(n)}{S}_{kl} = \left[ C_{il} + \left( \overset{(n)}{S}_{ij} + \overset{(A_{n+1})}{K_{ij}} \right) \cdot A_{jl} \right] \quad (43)$$

oder abgekürzt

$$\overset{(n)}{Y}_{ik} \cdot \overset{(n)}{S}_{kl} = \overset{(n)}{X}_{il}, \text{ d. h. } \overset{(n)}{S}_{kl} = \overset{(n)}{Y}_{ki}^{-1} \cdot \overset{(n)}{X}_{il}, \quad (44)$$

wobei  $\overset{(n)}{X}_{il}$  und  $\overset{(n)}{Y}_{ik}$  die Klammertensoren von (43) bedeuten.

Am Knoten  $A_n$  muß, wie bereits schon bemerkt, gelten:

$$\overset{(n-1)}{\delta \bar{M}}_i + \overset{(A_n)}{\delta M}_i + \overset{(n)}{\delta M}_i = 0,$$

das heißt

$$\left( \overset{(n-1)}{\bar{S}}_{ij} + \overset{(A_n)}{K_{ij}} + \overset{(n)}{S}_{ij} \right) \cdot \delta D_j = 0$$

und die Knickbedingung lautet deshalb

$$\left| \overset{(n-1)}{\bar{S}}_{ij} + \overset{(A_n)}{K_{ij}} + \overset{(n)}{S}_{ij} \right| = 0. \quad (45)$$

Indifferentes Gleichgewicht tritt bei der kritischen Druckkraft  $P_K$  gleichzeitig an allen Knoten ein. Man kann deswegen irgendeinen Knoten herausgreifen und die Knickbedingung dafür anschreiben. Die Rechenvorschrift ist nun einfach: Man berechnet zuerst die Steifigkeitstensoren der einzelnen Gruppen von Stützstäben, ferner für jeden Teilstab die besonders einfachen Tensoren  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$ , und zwar für eine gewählte erste Näherung der kritischen Druckkraft  $P_{K,1}$ . Damit kann man nach den Formeln (40) bzw. (44) die weitergeleiteten Tensoren  $\overset{(n)}{\bar{S}}_{ij}$  bzw.  $\overset{(n)}{S}_{ij}$  ermitteln,

indem man einmal vom oberen Ende des Durchlaufträgers ausgeht und das andere Mal vom unteren Ende. Ist an einem beliebig herausgegriffenen Knoten die Determinante nach (45) ungleich Null, so ist eine bessere Näherung  $P_{K, II}$  anzunehmen usw. Einfache grobe untere bzw. obere Schranken für die kritische Druckkraft  $P_K$  erhält man in bekannter Weise, wenn man vollkommen gelenkige Lagerungen in jedem Stützknoten bzw. vollkommen starre Einspannungen annimmt und jeden Teilstab für sich betrachtet. Z. B. kann man die Knickbedingung für den letzten Knoten  $A_{N+1}$  <sup>(N+1)</sup>  $S_{ij} = 0$  anschreiben, wenn der Durchlaufträger aus  $N$  Teilstäben besteht. Dort ist  $S_{ij} = 0$  und die Knickbedingung lautet also

$$\left| \begin{matrix} (N) & (A_{N+1}) \\ S_{ij} & K_{ij} \end{matrix} \right| = 0. \quad (46)$$

(Eingegangen am 18. Januar 1949.)

## Freie und erzwungene nichtlineare Schwingungen von Mehrmassensystemen\*.

Von A. Slibar.

Mit 8 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Es wird ein Näherungsverfahren zur Analyse von nichtlinearen Schwingungen von Mehrmassensystemen eingeführt. Das erste Integral der Bewegungsgleichungen bestimmt sich als Subnormalenkonstruktion der Geschwindigkeits-Weg-Kurven. Es liefert, da die Approximation durch Krümmungskreise erfolgt, recht gute Näherungen. Die Anwendbarkeit des Verfahrens ist an keine besondere Form von Dämpfung, Rückstellkraft oder erzwingende Kraft gebunden.

**Summary.** The paper gives a method for the approximate solution of nonlinear vibrating multi-masse systems. The first integral of the equations of motion is found by construction of subnormals. The process gives a good approximation on account of using the radius of curvature. The use of the method is not bound to special forms of damping, spring-law or external forces.

**Résumé.** On indique une méthode pour déterminer des solutions approximatives d'un système oscillant non-linéaire à plusieurs masses. On détermine l'intégrale première des équations du mouvement par construction des sous-normales. Cette méthode permet une bonne approximation grâce à l'emploi des rayons de courbure, et son emploi n'est pas limité à des genres particuliers d'amortissement, d'élasticité ou de forces extérieures.

### Einführung.

Ist die Federkennlinie oder Charakteristik eines schwingenden Systems eine Gerade, hat also die Bewegungsgleichung die Form

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + c x = \begin{cases} 0 \\ f(t) \end{cases}, \quad (1)$$

so nennt man die resultierende Schwingung „linear“.

Lautet das Bewegungsgesetz

$$m \ddot{x} + b (\dot{x}) \dot{x} + c (x) x = \begin{cases} 0 \\ f(t) \end{cases}, \quad (2)$$

so wird die entstehende Schwingung als „nichtlinear“ oder „pseudoharmonisch“ bezeichnet. Die Federkennlinie eines nichtlinearen Systems kann gekrümmt, mit einem Knick, allenfalls auch mit einer Unstetigkeitsstelle behaftet sein. Festzustellen ist, daß auch die Bewegungsgleichung eines Schwingers mit vom Ausschlag abhängiger, veränderlicher Masse, also von der Form

$$m(x) \ddot{x} + b \dot{x} + c x = \begin{cases} 0 \\ f(t) \end{cases} \quad (2a)$$

durch Division durch  $m(x)$  auf eine Gl. (2) entsprechende Form gebracht werden kann.

\* Herrn Prof. Dr. E. Melan zum 60. Geburtstag gewidmet.



Bei den meisten technischen Anwendungen (Werkstoffen) ist die Federkennlinie (Spannungs-Verformungs-Linie) für kleine Ausschläge (Verformungen) aus der spannungslosen Lage linear und weicht erst für größere Auslenkungen (Verformungen) aus dieser Lage von der ursprünglichen Tangentenrichtung nach oben oder unten ab. Im ersten Fall spricht man von „überlinearer“, im zweiten von „unterlinearer“ Schwingung<sup>1</sup>.

Die kennzeichnenden Eigenschaften des harmonischen Schwingers, also:

Isochronismus, das heißt vom Schwingungsausschlag unabhängige Eigenfrequenz,

Superpositionsgesetz, das heißt Überlagerung der freien und erzwungenen Schwingungen,

Resonanz, das heißt Aufschaukeln der Ausschläge bei Übereinstimmung der Erregerfrequenz mit der Eigenfrequenz bei nicht oder schwach gedämpfter Schwingung,

Unabhängigkeit der Phasenverschiebung von den Anfangsbedingungen sind beim nichtlinearen Schwinger nicht oder nur beschränkt vorhanden<sup>2</sup>.

Als häufigste Fälle nichtlinearer schwingender Systeme sind Anordnungen mit Spiel, mit vorgespannten Federn, mit bei Auslenkung steifer werdenden Federn (Bibby-Kupplung, Ringfederkupplung<sup>3</sup>) und schließlich alle Konstruktionen aus Materialien, die nicht dem Hooke'schen Gesetz gehorchen, wie z. B. Gummi, Leder, Gußeisen und Zement, zu nennen. Steigende Verbreitung findet der nichtlineare Schwinger im Tilgerbau, da er auf Grund seiner schwingungstilgenden, Resonanz verhütenden Eigenschaften vielen bisher üblichen Konstruktionen überlegen ist. Von Resonanz im üblichen Sinne kann bei nichtlinearem Schwinger überhaupt nicht gesprochen werden, da an Stelle einer bestimmten Eigenfrequenz, weil diese mit dem Ausschlag veränderlich ist, ein Eigenfrequenzbereich auftritt. Bei den überlinearen Schwingern steigt die Eigenfrequenz, bei den unterlinearen sinkt sie mit größer werdendem Ausschlag. Bei allen nichtlinearen Schwingern ist somit eine Anzahl möglicher Schwingungszustände, eben innerhalb des genannten Eigenfrequenzbereiches, gegeben.

K. Maier<sup>4</sup> hat durch eine Reihe von Versuchen nachgewiesen, daß die beim nichtlinearen Schwinger auftretenden Eigenschaften nicht etwa auf Reibungsverluste innerhalb der nichtlinear schwingenden Teile des Systems, sondern gerade auf die Nichtlinearität ihrer Kennlinien zurückzuführen sind. Weiters wird in der genannten Arbeit gezeigt, daß die Wirksamkeit der Tilgung vom Verhältnis der linear schwingenden zu den nichtlinearen Bestandteilen einer Anordnung abhängt.

Die Behandlung des nichtlinearen Einmassensystems ist bekannt. Für eine gewisse Gruppe von Rückstellkraftfunktionen hat G. Duffing in einer grundlegenden Arbeit<sup>5</sup> die freien und von einer erzwingenden Kraft ( $P = k \cdot \sin \omega t$ ) resultierenden

<sup>1</sup> L. Cremer: Untersuchungen über Energiebilanz und Phasenlage bei nichtlinearen Systemen an Hand der periodisch geschwenkten Rollbahn. Forsch. Gebiete Ingenieurwes., Ausg. A 12. 226—236 (1941).

<sup>2</sup> J. Geiger: Technische Schwingungslehre. Berlin: Springer-Verlag. 1927. — S. Timoshenko: Schwingungsprobleme der Technik. Berlin: Springer-Verlag. 1932. — K. Klotter: Einführung in die Technische Schwingungslehre. Berlin: Springer-Verlag. 1938. — J. P. den Hartog: Mechanische Schwingungen. Berlin: Springer-Verlag. 1936. — E. Lehr: Schwingungstechnik, Bd. II. Berlin: Springer-Verlag. 1934. — K. W. Wagner: Einführung in die Lehre von den Schwingungen und Wellen. Wiesbaden: D. V. B. 1947.

<sup>3</sup> G. Altmann: Drehfedernde Wellenkupplungen. Kraftfahrtechn. Forschungen, H. 6. Berlin: VDI-Verlag. 1937.

<sup>4</sup> K. Maier: Begrenzung von Resonanzdreherschwingungen durch einen Schwinger mit gekrümmter Federkennlinie. Luftfahrt-Forsch. 18, 18—23 (1941).

<sup>5</sup> G. Duffing: Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Sammlung Vieweg, H. 41/42, S. 25—47. Braunschweig. 1928.

nichtlinearen Schwingungen mit Hilfe der Weierstraßschen  $p$ -Funktion bestimmt. A. Weigand<sup>6</sup> hat einen der Zahlenrechnung besser zugänglichen Weg mit Hilfe der elliptischen Funktionen von Jacobi abgeleitet. Außerdem wurden von einer Reihe von Autoren verschiedene graphische und numerische Lösungsmethoden für nichtlineare Einmassensysteme angegeben<sup>7</sup>.

Die Behandlung der freien Schwingungen des nichtlinearen Zweimassensystems ist für die gebräuchlichen Anordnungen durchgeführt<sup>8</sup>.

Im folgenden wird ein Verfahren angegeben, das auf übersichtliche und einfache Weise Näherungslösungen für das nichtlineare  $n$ -Massensystem, bei beliebigem  $n$ , liefert<sup>9</sup>. Es kann durch Iteration beliebig verschärft werden. Häufig sind dem Konstrukteur Federkennlinien auch nur graphisch gegeben, so daß er zwangsläufig auf eine zeichnerische Lösung verwiesen wird.

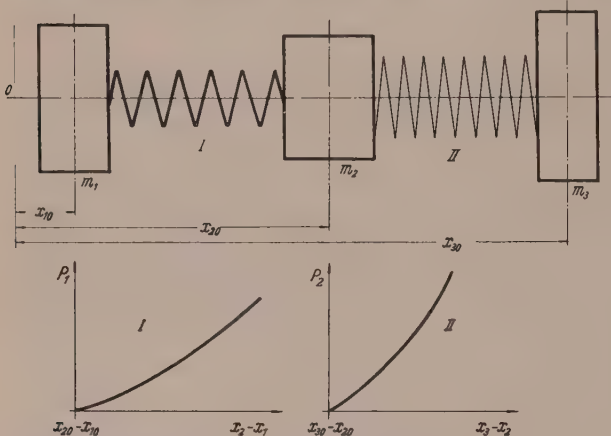


Abb. 1. Nichtlineares Dreimassensystem. a) Anordnung des Systems. b) Federkennlinien.

Allgemeiner Lösungsgang für das freie, gedämpfte Dreimassensystem.

Einführend sei das Verfahren an einem nach Abb. 1 gestalteten System der Behandlung zugrunde gelegt.

In vielen Fällen werden Systeme mit mehr als drei Massen durch Einführung von Ersatzmassen nach bekannten Verfahren<sup>10</sup> auf Dreimassensysteme zurückgeführt werden können.

Die Dämpfung sei im vorgelegten System der Relativgeschwindigkeit zwischen den einzelnen Massen proportional. Für die freie Schwingung gilt:

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 + m_3 \dot{x}_3 = (m_1 + m_2 + m_3) \dot{x}_s = \text{Const.} \quad (3)$$

Die Federkraft der Feder I hängt von der Relativverschiebung der beiden Massen  $m_1 (x_2 - x_1 - l_0)$  und  $m_2$  ab, wenn  $l_0$  die ungespannte Länge von I ist. Sie ist abkürzend mit

<sup>6</sup> A. Weigand: Die Berechnung freier nichtlinearer Schwingungen mit Hilfe der elliptischen Funktionen. Forsch. Gebiete Ingenieurwes., Ausg. A 12, 274—284 (1941).

<sup>7</sup> J. Geiger: Mechanische Schwingungen und ihre Messung, S. 23—33. Berlin: Springer-Verlag. 1927. — E. Lehr: Schwingungstechnik, Bd. II, S. 336—367. Berlin: Springer-Verlag. 1934. — K. Klotter: Einführung in die technische Schwingungslehre, Bd. I, S. 98—115. Berlin: Springer-Verlag. 1936. — S. Timoshenko: Schwingungsprobleme der Technik, S. 82—105. Berlin: Springer-Verlag. 1932. — J. P. den Hartog: Mechanische Schwingungen. Berlin: Springer-Verlag. 1936. — E. Braun: Über die graphische Lösung der Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen bei beliebigem Gesetz für Dämpfung, Rückstellkraft und Antriebskraft. Ingenieur-Arch. 8, 198—202 (1937). — F. Söchting: Freie, erzwungene, gedämpfte Schwingung mit nicht linearer Federkennlinie des Systems mit einem Freiheitsgrad. Österr. Ingenieur-Arch. 1, 382—389 (1947). — Th. Zech: Zum Abklingen nicht linearer Schwingungen. Ingenieur-Arch. 13, 21—33 (1942/43).

<sup>8</sup> A. Slibar: Pseudoharmonische Schwingungen von Ein- und Zweimassensystemen. Maschinenbau u. Wärmewirtsch. H. 1 (1949).

<sup>9</sup> Über eine Erweiterung der Anwendung siehe A. Slibar: Schwingungen von parallel geschalteten bzw. verzweigten Maschinen mit nichtlinearen Gliedern. Zs. M. u. W., 1950.

<sup>10</sup> B. Frank: Abgekürzte Drehschwingungsrechnung mit Hilfe der Ersatzmasse und Ersatzkraft. Ingenieur-Arch. 10, 371—394 (1939).

die der Feder II durch 
$$P_1 = f_1(x_2 - x_1), \quad (4)$$

$$P_2 = f_2(x_3 - x_2) \quad (4')$$

gegeben. Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 - f_1(x_2 - x_1) + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + f_1(x_2 - x_1) - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - f_2(x_3 - x_2) - b_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) &= 0, \\ m_3 \ddot{x}_3 + f_2(x_3 - x_2) + b_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Dabei bedeuten  $b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$  den Wert der Relativdämpfung zwischen erster und zweiter und  $b_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)$  den Betrag der Dämpfung zwischen zweiter und dritter Masse. Mit der Substitution

$$\xi = x_2 - x_1 \quad \text{und} \quad \eta = x_3 - x_2$$

folgt nach Division durch die einzelnen Massenfaktoren  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$  und nach Subtraktion der ersten von der zweiten und der zweiten von der dritten Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) f_1(\xi) + b_1 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \dot{\xi} - \frac{1}{m_2} f_2(\eta) - \frac{b_2}{m_2} \dot{\eta} &= 0, \\ \ddot{\eta} + \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right) f_2(\eta) + b_2 \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right) \dot{\eta} - \frac{b_1}{m_2} \dot{\xi} - \frac{1}{m_2} f_1(\xi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Die Gl. (6) stellen zwei gekoppelte Differentialgleichungen dar, die nach Umformen mit

$$\ddot{\xi} = \dot{\xi} \frac{d\dot{\xi}}{d\xi} \quad \text{und} \quad \ddot{\eta} = \dot{\eta} \frac{d\dot{\eta}}{d\eta}$$

beim Übergang zu endlich kleinen Größen  $\Delta\xi$ ,  $\Delta\xi$  bzw.  $\Delta\dot{\eta}$ ,  $\Delta\eta$  in die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} \frac{\Delta\dot{\xi}}{\Delta\xi} &= - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) [f_1(\xi) + b_1 \dot{\xi}] + \frac{1}{m_2} [f_2(\eta) + b_2 \dot{\eta}], \\ \dot{\eta} \frac{\Delta\dot{\eta}}{\Delta\eta} &= - \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right) [f_2(\eta) + b_2 \dot{\eta}] + \frac{b_1}{m_1} \dot{\xi} - \frac{1}{m_2} f_1(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

übergehen. Eine exakte allgemeine Lösung der Differentialgleichungen (6) dürfte für beliebige Formen der Funktionen  $f_1$  bzw.  $f_2$  kaum möglich sein. Aus (6') ist jedoch eine einfache Bestimmung der Funktionen

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}(\xi) \quad \text{und} \quad \dot{\eta} = \dot{\eta}(\eta) \quad (7)$$

auf graphischem Wege durch gekoppelte Behandlung beider Gleichungen möglich. Aus

$$\dot{\xi} = \frac{\Delta\xi}{\Delta t}, \quad \dot{\eta} = \frac{\Delta\eta}{\Delta t}$$

folgt

$$\frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} = \frac{\dot{\xi}}{\dot{\eta}}, \quad (8)$$

mit welcher Beziehung bei zeichnerischer Lösung zu einem angenommenen Wert  $\Delta\xi$  bzw.  $\Delta\eta$  das zugehörige  $\Delta\eta$  bzw.  $\Delta\xi$  bestimmt werden kann. Für die freie Schwingung des Systems kann nun, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten zweier Massen gegeben sind, die Bestimmung der dritten Geschwindigkeit nach

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 + m_3 \dot{x}_3 = 0 \quad (3')$$

erfolgen. Die schrittweise Bestimmung der Funktionen (7) kann unter Beachtung von (8) nach den Gl. (6') durchgeführt werden. Es stellen die linken Seiten von Gl. (6') die Subnormalen der Funktionen (7) dar.



In Abb. 2 mögen dabei  $\xi_0$  und  $\eta_0$  die Lagen,  $\dot{\xi}_0$  und  $\dot{\eta}_0$  die Relativgeschwindigkeiten der Massen zur Zeit  $t = 0$  angeben.

Mit dem so bestimmten Verlauf der Kurven  $\xi(\xi)$  und  $\dot{\eta}(\eta)$  ist leicht die dazu reziproke Funktion  $\frac{1}{\xi}$  bzw.  $\frac{1}{\eta}$  zu zeichnen. Die Schwingungsdauern von  $m_1$  gegen  $m_2$  bzw. von  $m_2$  gegen  $m_3$  können mit Hilfe von

$$t_1 = 2 \int_{\xi_0}^{\xi_{\max}} \frac{d\xi}{\dot{\xi}} = 2 \sum_{\xi_0}^{\xi_{\max}} \frac{\Delta\xi}{\dot{\xi}} \quad \text{bzw.} \quad t_2 = 2 \int_{\eta_0}^{\eta_{\max}} \frac{d\eta}{\dot{\eta}} = 2 \sum_{\eta_0}^{\eta_{\max}} \frac{\Delta\eta}{\dot{\eta}} \quad (9)$$

bestimmt werden. Eine Verbesserung, das heißt genauere Werte liefert das Verfahren bei Einschaltung sogenannter Halbschritte<sup>11</sup> oder die Verwendung der Krümmungskreise\*, deren Mittelpunkte die Schnittpunkte benachbarter Subnormalen liefern.

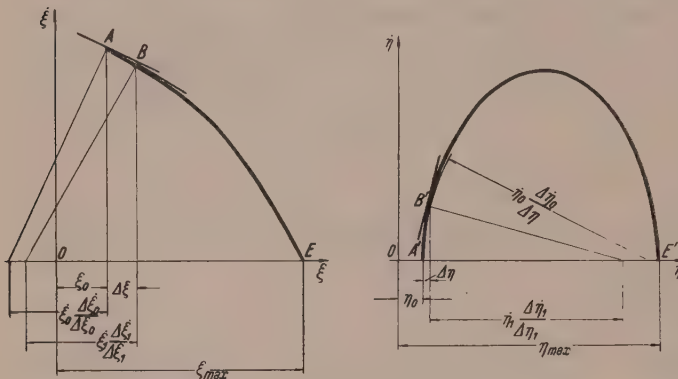


Abb. 2. Schema der Konstruktion der Geschwindigkeits-Weg-Kurven mit Hilfe der Subnormalen.

Die weitere Auswertung von (9) kann sowohl zeichnerisch als auch numerisch durchgeführt werden. Vorteilhafter dürfte der erstere Weg sein, da bei Benutzung einer arcsin-Teilung nach Abb. 3 der Kurvenverlauf in vielen Fällen nicht stark von einer Geraden abweichen wird.

Aus Abb. 3 kann bei symmetrischer Federkennlinie die Dauer einer Viertelperiode

der Relativbewegung als Ordinatenwert für die beiden linken bzw. rechten Massen abgenommen werden.

Ist die Federkennlinie nicht symmetrisch, so ist die Durchführung des Verfahrens

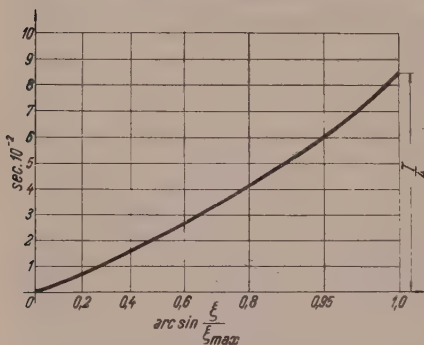


Abb. 3. Zeit-Weg-Kurve bei Verwendung einer arc sin-Teilung.

über eine weitere Viertelperiode der beiden linken bzw. rechten Massen durchzuführen.

Ist der Wert der Anfangs- bzw. Endgeschwindigkeit zweier Massen zueinander, also z. B.  $\dot{\eta}_0 = 0$  bzw.  $\eta_E = 0$ , so nimmt die Funktion  $\psi_0 = \frac{1}{\eta_0}$  bzw.  $\psi_E = \frac{1}{\eta_E}$  den Wert  $\infty$  an. Der

Grenzwert der Subnormalen wird in diesen Punkten zum Krümmungsradius, und es kann der Krümmungskreis der Funktion (7) in der Ausgangs- bzw. Endstellung gezeichnet werden (Abb. 2). Bei Benützung eines Diagramms nach Abb. 3 kann auch mit einem kleinen Wert  $\Delta t$  begonnen oder knapp vor Nullwerden von  $\dot{\eta}$

im Endausschlag die Konstruktion abgebrochen und über das kleine Intervall  $\Delta t$  gleichförmige Beschleunigung bzw. Verzögerung angenommen werden. Die Zeit-Ausschlaglinie wird damit eine annähernd geradlinige Fortsetzung erfahren können.

<sup>11</sup> Zur Einschaltung von Halbschritten siehe z. B. E. Kamke: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen, 2. Aufl., S. 158. Leipzig: Akad. Verlag Becker u. Erler. 1943.

## Anwendungen.

a) Freie, gedämpfte Schwingung des Dreimassensystems bei Federkennlinie mit Spiel.

Zur Erläuterung des vorstehenden Verfahrens sei die Anwendung an einem nach Abb. 4a ausgebildeten System (Wagenkupplungen) gezeigt. Die zugehörigen Federkennlinien mögen nach Abb. 4b verlaufen.

Ist die Dämpfung proportional den Geschwindigkeiten der einzelnen Massen, haben also die Dämpfungsgesetze die Form

$$R_1^* = b_1 \dot{x}_1, \quad R_2^* = b_2 \dot{x}_2, \quad R_3^* = b_3 \dot{x}_3, \quad (10)$$

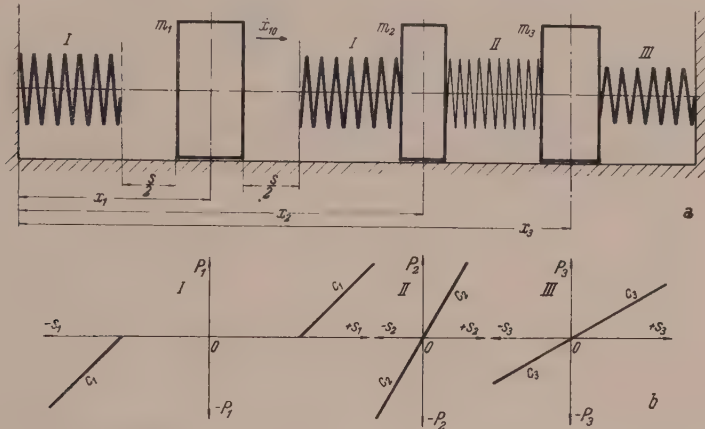


Abb. 4. Dreimassensystem bei Federung mit Spiel. a) Anordnung des Systems. b) Federkennlinien.

wenn  $b_1$ ,  $b_2$  und  $b_3$  die Dämpfungsfaktoren sind. Erwähnt sei, daß eine den einzelnen Massen proportionale Dämpfung

$$R_1' = f_1 m_1, \quad R_2' = f_2 m_2, \quad R_3' = f_3 m_3 \quad (11)$$

mit genau gleichem Rechenaufwand analog zu behandeln wäre.

Die Bewegungsgleichungen des gegebenen Systems lauten für  $x_{10} + \frac{s}{2} \leq x_1 \leq x_{1E}$

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \left[ \left( x_{20} - x_{10} - \frac{s}{2} \right) - (x_2 - x_1) \right] + b_1 \dot{x}_1 &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_1 \left[ \left( x_{20} - x_{10} - \frac{s}{2} \right) - (x_2 - x_1) \right] + \\ &+ b_2 \dot{x}_2 + c_2 [(x_{30} - x_{20}) - (x_3 - x_2)] = 0, \\ m_3 \ddot{x}_3 - c_2 [(x_{30} - x_{20}) - (x_3 - x_2)] + b_3 \dot{x}_3 + c_3 (x_3 - x_{30}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Als Anfangswerte seien zur Zeit  $t = 0$

$$x_1 = x_{10}, \quad x_2 = x_{20}, \quad x_3 = x_{30} \quad \text{und} \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_{10}, \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_{20} = 0, \quad \dot{x}_3 = \dot{x}_{30} = 0$$

gegeben. Die Masse 1 durchläuft das Wegstück  $s/2$  federkraftfrei und mit der Anfangsbedingung  $\dot{x}_1 = \dot{x}_{10}$  ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt des Auftreffens auf Feder II gegeben. Die Berücksichtigung der Dämpfung auf dem Wegstück  $s/2$  kann mit Hilfe des Arbeitssatzes erfolgen. Eine Reduktion der Gl. (12) auf zwei gekoppelte Differentialgleichungen kann nicht durchgeführt werden, da auch federnde Glieder außerhalb der drei Massen am System angeordnet sind.

Die gleichen Umformungen wie im vorigen Abschnitt liefern

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 \frac{\Delta \dot{x}_1}{\Delta x_1} &= -\frac{c_1}{m_1} \left[ \left( x_{20} - x_{10} - \frac{s}{2} \right) - (x_2 - x_1) \right] - \frac{b_1}{m_1} \dot{x}_1, \\ \dot{x}_2 \frac{\Delta \dot{x}_2}{\Delta x_2} &= -\frac{c_2}{m_2} [(x_{30} - x_{20}) - (x_3 - x_2)] - \frac{b_2}{m_2} \dot{x}_2 + \\ &\quad + \frac{c_1}{m_2} \left[ \left( x_{20} - x_{10} - \frac{s}{2} \right) - (x_2 - x_1) \right], \\ \dot{x}_3 \frac{\Delta \dot{x}_3}{\Delta x_3} &= -\frac{c_3}{m_3} (x_3 - x_{30}) - \frac{b_3}{m_3} \dot{x}_3 + \frac{c_2}{m_3} [(x_{30} - x_{20}) - (x_3 - x_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

Mit diesen Bestimmungsgleichungen der Subnormalen der Kurven

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_1(x_1), \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_2(x_2), \quad \dot{x}_3 = \dot{x}_3(x_3) \quad (13)$$

und den Beziehungen

$$\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}, \quad \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_3} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_3}, \quad \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_3} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_3} \quad (14)$$

können die durch (13) dargestellten Funktionen schrittweise gezeichnet werden (Abb. 2).

Die Einzelschwingungszeiten ergeben sich für die Viertelperiode zu

$$\left. \begin{aligned} t_1' &= \frac{s}{2 \dot{x}_{10}} + \int_{x_{10} + s/2}^{x_{1E}'} \frac{dx_1}{\dot{x}_1} = \frac{s}{2 \dot{x}_{10}} + \sum_{x_{10} + s/2}^{x_{1E}'} \frac{\Delta x_1}{\dot{x}_1}, & t_2 &= \int_{x_{20}}^{x_{2E}} \frac{dx_2}{\dot{x}_2} = \sum_{x_{20}}^{x_{2E}} \frac{\Delta x_2}{\dot{x}_2}, \\ t_3 &= \int_{x_{30}}^{x_{3E}} \frac{dx_3}{\dot{x}_3} = \sum_{x_{30}}^{x_{3E}} \frac{\Delta x_3}{\dot{x}_3}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Zur Bestimmung der Gesamtschwingungsdauer der Masse 1 ist die Bewegungsgleichung für das Auswandern dieser Masse nach links zusätzlich zu behandeln. Sie hat die Form

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \left[ \left( x_{10} - \frac{s}{2} \right) - x_1 \right] + b_1 \dot{x}_1 = 0. \quad (16)$$

Gl. (16) kann entweder nach bekannten Verfahren<sup>12</sup> oder nach gleicher Behandlung mit Umformung

$$\dot{x}_1 \frac{\Delta \dot{x}_1}{\Delta x_1} = -c_1 \left[ \left( x_{10} - \frac{s}{2} \right) - x_1 \right] - b_1 \dot{x}_1$$

ausgewertet werden. Die Zeit einer Halbschwingung ergibt sich zu

$$t_1'' = \frac{s}{2 \dot{x}_{10}} + \int_{x_{10} - s/2}^{x_{1E}''} \frac{dx_1}{\dot{x}_1} = \frac{s}{2 \dot{x}_{10}} + \sum_{x_{10} - s/2}^{x_{1E}''} \frac{\Delta x_1}{\dot{x}_1}. \quad (17)$$

Dabei bedeutet  $x_{1E}''$  der Größtausschlag von Masse 1 nach links und kann bei gegebenen Anfangsbedingungen mit dem Arbeitssatz bestimmt werden. Die Schwingungsdauer der Halbperiode von  $m_1$  ergibt sich zu

$$t_1 = t_1' + t_1''. \quad (18)$$

<sup>12</sup> Siehe angegebene Verfahren Fußnoten 5 bis 8. Berichtigung: In der Arbeit Fußnote 8 soll Gl. (12) lauten mit  $\xi_{10} \neq 0$

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{\xi_{10}^{12}}{b} + (\xi_{11} - c_2 \xi_{11}/b m_1)^2} \cdot \cos(\sqrt{b} \cdot t + \eta) + \frac{c_2 \xi_{11}}{b m_1}$$

bzw. die Lösung (13)

$$\xi_1 = \sqrt{\xi_{10}^2/\omega^2 + \xi_{10}^2} \cdot \cos(\omega t + \vartheta) \quad \text{und damit} \quad T = 2(t' + t'') + T_1.$$



b) Erzwungene, gedämpfte Schwingung des Dreimassensystems bei vorgespannter Feder.

Anordnung A. Es sei ein nach Abb. 5a schematisch darzustellendes System gegeben, die zugehörigen Federkennlinien mögen den in Abb. 5b festgelegten Verlauf haben. Hat die an Masse 3 (zwischen den Federn III und IV) angreifende Störungskraft die Form

$$P = P_0 \cdot \sin(\omega t + \kappa), \quad (19)$$

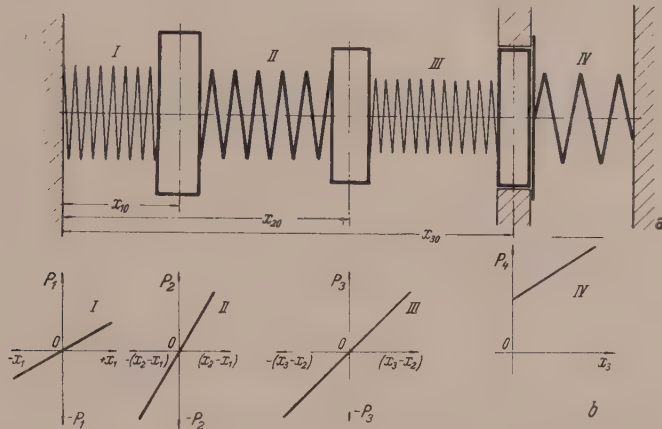


Abb. 5. Dreimassensystem mit vorgespannter Feder. a) Anordnung des Systems. b) Federkennlinien.

so lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -c_1 (x_1 - x_{10}) + c_2 [(x_2 - x_1) - (x_{20} - x_{10})] - b_1 \dot{x}_1, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= c_3 [(x_3 - x_2) - (x_{30} - x_{20})] - c_2 [(x_2 - x_1) - (x_{20} - x_{10})] - b_2 \dot{x}_2, \\ m_3 \ddot{x}_3 &= -c_3 [(x_3 - x_2) - (x_{30} - x_{20})] - c_4 (x_3 - x_{30}) - \\ &\quad - C_{40} - b_3 \dot{x}_3 + P_0 \cdot \sin(\omega t + \kappa), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

woraus nach Umformung

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 \frac{\Delta \dot{x}_1}{\Delta x_1} &= -\frac{c_1}{m_1} (x_1 - x_{10}) + \frac{c_2}{m_1} [(x_2 - x_1) - (x_{20} - x_{10})] - \frac{b_1}{m_1} \cdot \dot{x}_1, \\ \dot{x}_2 \frac{\Delta \dot{x}_2}{\Delta x_2} &= \frac{c_3}{m_2} [(x_3 - x_2) - (x_{30} - x_{20})] - \\ &\quad - \frac{c_2}{m_2} [(x_2 - x_1) - (x_{20} - x_{10})] - \frac{b_2}{m_2} \dot{x}_2, \\ \dot{x}_3 \frac{\Delta \dot{x}_3}{\Delta x_3} &= -\frac{c_3}{m_3} [(x_3 - x_2) - (x_{30} - x_{20})] - \\ &\quad - \frac{c_4}{m_3} (x_3 - x_{30}) - \frac{C_{40}}{m_3} - \frac{b_3}{m_3} \dot{x}_3 + \frac{P_0}{m_3} \sin(\omega t + \kappa) \end{aligned} \right\} \quad (20')$$

folgt. In (20) bedeuten dabei  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  und  $c_4$  die einzelnen Federkonstanten,  $C_{40}$  den Betrag der Vorspannung der Feder IV und  $b_1$ ,  $b_2$  und  $b_3$  die Dämpfungsfaktoren.

Mit Hilfe der Beziehungen

$$\frac{\dot{x}_1}{x_2} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}, \quad \frac{\dot{x}_2}{x_3} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_3}, \quad \frac{\dot{x}_1}{x_3} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_3} \quad (14)$$

und

$$\Delta t = \frac{\Delta x_1}{\dot{x}_1} = \frac{\Delta x_2}{\dot{x}_2} = \frac{\Delta x_3}{\dot{x}_3} \quad (21)$$

kann die Bestimmung der Funktionen  $\dot{x}_i = \dot{x}_i(x_i)$  bei gegebenen Anfangswerten durchgeführt werden. Die Werte der zu jedem Zeitpunkt wirkenden Störungskraft errechnen sich aus (19) bei Beachtung von (21). Die Bestimmung der Schwingungsdauern wird entsprechend dem in den vorigen Abschnitten gezeigten Verfahren durch Bildung von

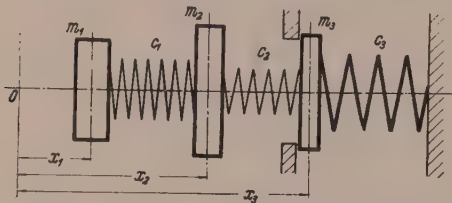


Abb. 6. Dreimassensystem mit vorgespannter Feder.

$$t_i = \int_0^{x_i E} \frac{dx_i}{\dot{x}_i} = \sum_0^{x_i E} \frac{\Delta x_i}{\dot{x}_i}$$

erreicht.

Anordnung B. Ist bei vorgespanntem Federglied eine Anordnung nach Abb. 6 gegeben, so ist die Behandlung nicht in der oben angegebenen Weise möglich. Da wieder gedämpfte Schwingung vorliegen soll, wird sich die Durch-

rechnung über einige Hin- und Rückläufe der einzelnen Massen erstrecken. Sie kann entweder ohne Berücksichtigung des Energieverlustes, welcher durch Aufprallen der Masse 3 eintreten wird, erfolgen (also bei angenommenem Stoßkoeffizienten eins), oder

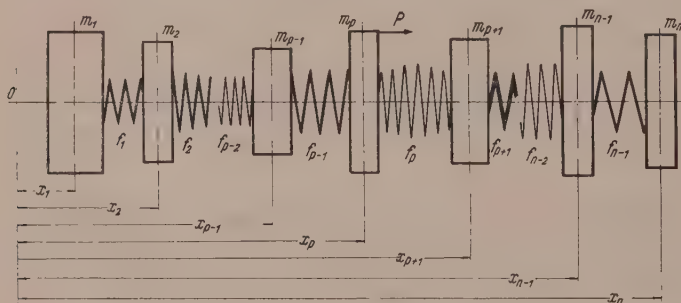


Abb. 7. Nichtlineares, gedämpftes  $n$ -Massensystem.

in der Weise, daß bei bekannter Werkstoffzusammenstellung und bekanntem Stoßkoeffizienten eine Korrektur der Störungskraft derart durchgeführt wird, daß in sie der zu erwartende Rückstoßwert eingerechnet wird. Die Bestimmung der Kraftgrößen kann nach bekannten Verfahren<sup>13</sup> durchgeführt werden.

### Erzwungene, gedämpfte Schwingungen des $n$ -Massensystems bei nichtlinearer Federkennlinie.

Abschließend sei die Anwendbarkeit des eingeführten Verfahrens bei Analyse eines  $n$ -Massensystems, bei beliebigem  $n$  gezeigt. Die Anordnung sei nach Abb. 7 durchgeführt. Die Störungskraft von der Form  $P = k \cdot \sin \omega_p t$  greife an der  $p$ -ten Masse an. Weder ihre Form noch ihr Angriffspunkt sind für die Durchführung des Verfahrens von Bedeutung.

Bei Durchführung ist zur Bestimmung der einzelnen Wegelemente  $\Delta \xi_i$  die Abhängigkeit der Zeitabschnitte  $\Delta t$  zur Berechnung der einzelnen Werte

$$\dot{\xi}_i \frac{\Delta \xi_i}{\Delta \xi} \quad (22)$$

zu beachten. Mit diesen Zeitabschnitten  $\Delta t$  ist die Größe der zu diesem Zeitpunkt wirkenden Störungskraft zu bestimmen. Umgekehrt ist bei Annahme von  $\Delta t$  die zugehörige Größe von  $\Delta \xi_i$  aus Gl. (22) bei gegebenen Anfangsbedingungen möglich. Eine weitere graphische Summierung wird bei Behandlung der erzwungenen Schwingung nicht nötig, so daß der Rechnungsgang nicht wesentlich umfangreicher wird.

Werden die Federkräfte als Funktionen der Relativverschiebung mit

<sup>13</sup> Zur Berechnung der Stoßkraft siehe z. B. K. Wolf: Lehrbuch der Technischen Mechanik starrer Systeme. Wien: Springer-Verlag. 1931. — F. Berger: Das Gesetz des Kraftverlaufes beim Stoß. Braunschweig: Vieweg. 1924.

$$R_1 = f_1(x_2 - x_1), \quad R_2 = f_2(x_3 - x_2) \dots, \quad R_p = f_p(x_{p+1} - x_p) \dots, \\ R_{n-1} = f_{n-1}(x_n - x_{n-1}) \quad (23)$$

und die Dämpfungen mit

$$D_1 = b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \quad D_2 = b_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \dots, \quad D_p = b_p(\dot{x}_{p+1} - \dot{x}_p) \dots, \\ D_{n-1} = b_{n-1}(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}), \quad (24)$$

bezeichnet, so erhalten die Bewegungsgleichungen die Form:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 - f_1(x_2 - x_1) - b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + f_1(x_2 - x_1) - f_2(x_3 - x_2) + b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - b_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) &= 0, \\ \vdots & \\ m_p \ddot{x}_p + f_{p-1}(x_p - x_{p-1}) - f_p(x_{p+1} - x_p) + b_{p-1}(\dot{x}_p - \dot{x}_{p-1}) - \\ &\quad - b_p(\dot{x}_{p+1} - \dot{x}_p) = k \cdot \sin \omega_p \cdot t, \\ \vdots & \\ m_{n-1} \ddot{x}_{n-1} + f_{n-2}(x_{n-1} - x_{n-2}) - f_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + \\ &\quad + b_{n-2}(\dot{x}_{n-1} - \dot{x}_{n-2}) - b_{n-1}(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}) = 0, \\ m_n \ddot{x}_n + f_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + b_{n-1}(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Durch Subtraktion der ersten von der zweiten und der  $p-1$ -ten von der  $p$ -ten Gleichung und Substitution der Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= (x_2 - x_1), & \dot{\xi}_1 &= (\dot{x}_2 - \dot{x}_1), & \ddot{\xi}_1 &= (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1), \\ \xi_2 &= (x_3 - x_2), & \dot{\xi}_2 &= (\dot{x}_3 - \dot{x}_2), & \ddot{\xi}_2 &= (\ddot{x}_3 - \ddot{x}_2), \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \xi_p &= (x_{p+1} - x_p), & \dot{\xi}_p &= (\dot{x}_{p+1} - \dot{x}_p), & \ddot{\xi}_p &= (\ddot{x}_{p+1} - \ddot{x}_p), \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \xi_{n-1} &= (x_n - x_{n-1}), & \dot{\xi}_{n-1} &= (\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}), & \ddot{\xi}_{n-1} &= (\ddot{x}_n - \ddot{x}_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

in das neue, um eine Gleichung verminderte System und nach gleicher Umformung wie in den vorherigen Abschnitten folgt:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_1 \frac{\Delta \dot{\xi}_1}{\Delta \xi_1} &= - \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) f_1(\xi_1) - \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) b_1 \cdot \dot{\xi}_1 + b_2 \dot{\xi}_2 \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \cdot f_2(\xi_2), \\ \dot{\xi}_2 \frac{\Delta \dot{\xi}_2}{\Delta \xi_2} &= - \left( \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) f_2(\xi_2) - \left( \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) b_2 \cdot \dot{\xi}_2 + \frac{1}{m_2} b_1 \cdot \dot{\xi}_1 + \\ &\quad + \frac{1}{m_3} b_3 \dot{\xi}_3 + \frac{1}{m_3} \cdot f_3(\xi_3), \\ \vdots & \\ \dot{\xi}_{p-1} \frac{\Delta \dot{\xi}_{p-1}}{\Delta \xi_{p-1}} &= - \left( \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_{p-1}} \right) f_{p-1}(\xi_{p-1}) - \left( \frac{1}{m_{p-1}} + \frac{1}{m_p} \right) b_{p-1} \dot{\xi}_{p-1} + \\ &\quad + \frac{1}{m_{p-2}} f_{p-2}(\xi_{p-2}) + \frac{1}{m_p} b_p \dot{\xi}_p + k \cdot \sin \omega_p \cdot t, \\ \dot{\xi}_p \frac{\Delta \dot{\xi}_p}{\Delta \xi_p} &= - \left( \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_{p+1}} \right) f_p(\xi_p) - \left( \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_{p+1}} \right) b_p \cdot \dot{\xi}_p + \\ &\quad + \frac{1}{m_{p-1}} f_{p-1}(\xi_{p-1}) + \frac{1}{m_{p+1}} f_{p+1}(\xi_{p+1}) + \frac{1}{m_{p+1}} b_{p+1} \cdot \dot{\xi}_{p+1} - k \cdot \sin \omega_p t, \\ \vdots & \\ \dot{\xi}_{n-1} \frac{\Delta \dot{\xi}_{n-1}}{\Delta \xi_{n-1}} &= - \left( \frac{1}{m_{n-1}} + \frac{1}{m_n} \right) f_{n-1}(\xi_{n-1}) - \left( \frac{1}{m_{n-2}} + \frac{1}{m_{n-1}} \right) b_{n-1} \dot{\xi}_{n-1} + \\ &\quad + \frac{1}{m_{n-2}} b_{n-2} \dot{\xi}_{n-2}. \end{aligned} \right\} \quad (25')$$



Zur Bestimmung der  $(n - 1)$  Funktionen  $\dot{\xi}_i = \dot{\xi}_i(\xi_i)$  ist die graphische Darstellung dieser Kurven analog dem bei Behandlung des Dreimassensystems gezeigten Verfahren mit Hilfe der Subnormalenkonstruktion durchzuführen. Nach Festlegung der erforderlichen Maßstäbe ist mit den gegebenen Anfangswerten  $\xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{n0}, \dots, \xi_{(n-1)0}, \dot{\xi}_{10}, \dot{\xi}_{20}, \dots, \dot{\xi}_{n0}, \dots, \dot{\xi}_{(n-1)0}$  beginnend, jeweils der folgende Wert der Subnormalen aus (25') zu bestimmen und damit  $\dot{\xi}_i(\xi_i)$  festzulegen. Mitlaufend ist bei erzwungener Schwingung die Bestimmung der Werte  $\Delta t_i$  nach  $\Delta t_i = \Delta \xi_i / \dot{\xi}_i$

erforderlich, um den jeweiligen Momentanwert der Störungskraft an der  $p$ -ten Masse zu errechnen.

Der gesamte Lösungsgang ist im wesentlichen in Abb. 8 zusammengefaßt. Die Schwingungsdauern einer Viertelperiode ergeben sich als die Endordinaten in Abb. 8b. Wie bereits angegeben, kann durch Einschaltung von Halbschritten<sup>14</sup> bzw. bei Verwendung der Krümmungsradien eine wesentlich größere Genauigkeit erzielt werden.

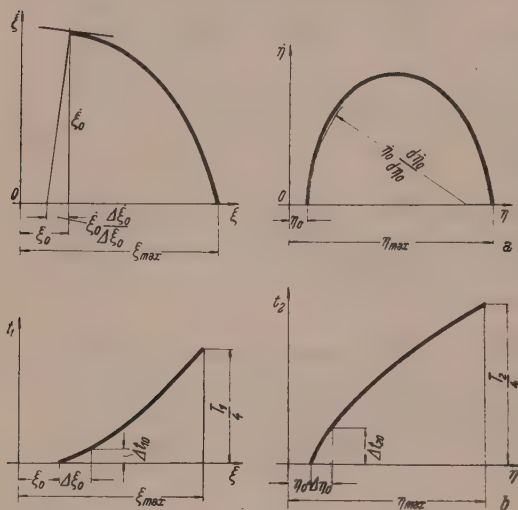


Abb. 8. Schema des graphischen Lösungsweges.

#### Zusammenfassung.

Es wird ein Verfahren zur angenäherten Analyse nichtlinearer Schwingungen von Drei- bzw.  $n$ -Massensystemen entwickelt. Die Behandlung der Differentialgleichungen wird graphisch durchgeführt. Bei

Anwendung besteht, wie an Beispielen gezeigt wird, weder eine Einschränkung auf besondere Federgesetze noch auf besondere Form der erzwingenden Kraft.

Vorteilhaft wird die Anwendung des Verfahrens auf Systeme mit nicht analytisch gegebenen Federkennlinien sein.

(Eingegangen am 8. März 1949.)

## Die Anwendung des Ultraschalles bei der Materialprüfung\*.

Von E. Skudrzyk, Wien.

(Mitteilung aus dem Institut für Schwachstromtechnik der Technischen Hochschule in Wien.)

Mit 17 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** In der vorliegenden Arbeit werden bekannte und neue Verfahren der Ultraschallmaterialprüfung und ihre praktischen Aussichten besprochen. Neben den akustisch-optischen Durchstrahlungs- und Echoverfahren zur Aufdeckung innerer Fehlstellen beginnen sich Schallgeschwindigkeits- und Schalldämpfungsmessungen durchzusetzen, die weitere Aufschlüsse über die innere Struktur und den Zustand der Bearbeitung liefern. Auch eine zerstörende Ultraschallmaterialprüfung liegt im Bereich der Möglichkeit. Zur Erläuterung der Leistungsfähigkeit der verschiedenen Methoden werden Meßergebnisse mitgeteilt.

**Summary.** Both old and new methods of supersonic examination of materials are discussed in connection with their chances for practical use. Besides the methods for detecting internal faults by acoustic-optical penetration or echoing, the measuring of the sound velocities and of

<sup>14</sup> Siehe Fußnote 10.

\* Herrn Prof. Dr. E. Melan zum 60. Geburtstag gewidmet.

the damping of acoustic vibrations begin to succeed and give more insight into the internal structure and the quality of the material working. It may be possible in the future to carry out a destructing supersonic test of materials. The author gives full data of some trials in order to explain the efficiency of the various methods.

**Résumé.** L'auteur traite des procédés déjà connus et des méthodes nouvelles d'essai des matériaux au moyen des ondes ultrasonores et donne une perspective sur leur emploi pratique. A côté des procédés de diaphanéisation sonore et la méthode par l'écho pour déceler les défauts de la masse, les méthodes de mesure de la vitesse et de l'atténuation du son commencent à s'imposer, en permettant de nouvelles observations sur l'infrastructure et la qualité du travail. Aussi, une méthode d'essai, avec détérioration, au moyen des ondes ultrasonores n'est plus hors de cause. Pour expliquer le rendement des différentes méthodes, l'auteur présente quelques résultats de mesure.

### 1. Einleitung.

Die praktische Anwendung des Ultraschalles wurde durch die Katastrophe der Titanic im Jahre 1912 ausgelöst; unter dem Eindruck dieses Unglückes suchte man nach einer Möglichkeit, treibende Eisberge akustisch zu orten<sup>1</sup>. Die Versuche verliefen damals freilich erfolglos, da die abgestrahlte Schallenergie viel zu gering und die Schwachstromtechnik noch nicht genügend fortgeschritten war. Die Erzeugung ausreichender Schallintensitäten gelang erst gegen Ende des ersten Weltkrieges mit Hilfe der von Langevin entwickelten Quarzmosaike. Sie wurden zur Aussendung kurzzeitiger Schallimpulse verwendet; aus der Zeitdauer bis zum Eintreffen der Reflexe konnte man auf die Entfernung von Eisbergen oder anderen Hindernissen schließen. Auch die Wassertiefe ließ sich auf ähnliche Weise ermitteln; das damals von Behm entwickelte Tiefenlot gehört heute zur unerläßlichen technischen Einrichtung eines Schiffes. Im Jahre 1927 wurden die ersten Ultraschallversuche auf medizinisch-biologischer Basis von Wood und Loomis angestellt. Es zeigte sich damals schon, daß durch starke Ultraschallintensitäten Zellen zerrissen, Bakterien und Kleinlebewesen getötet werden können. Im großen und ganzen hat man sich aber auch in der Folgezeit nur der Untersuchung der physikalischen Eigenschaften des Ultraschalles gewidmet. Man entwickelte optische Methoden zur Sichtbarmachung der Schallwellen, untersuchte Beugung und Brechung, bestimmte Schallgeschwindigkeit und Schalldämpfung verschiedenster Stoffe<sup>1, 2</sup>.

Im letzten Krieg wurde der Ultraschall in besonderem Ausmaß von den Kriegsmarinen eingesetzt: U-Boote verständigten sich unter Wasser mittels Ultraschalltelegraphie, Ultraschall wurde zur Auffindung feindlicher oder gesunkener Schiffe verwendet. Die akustischen Torpedos wurden durch Ultraschall gelenkt, akustische Minen durch Ultraschall ausgelöst. Gegen Kriegsende arbeitete die deutsche Marine an der Entwicklung von Verfahren zur Abbildung des Meeresbodens, von Minen und anderen Schifffahrtshindernissen durch Schallwellen. Die Materialprüfung mit Ultraschall wurde wieder aufgegriffen und verbessert. Im Zuge dieser intensiven Ultraschallforschung wurden zahlreiche Ergebnisse und Erfahrungen gewonnen, die infolge der sich überstürzenden Ereignisse entweder überhaupt nicht oder nur einseitig ausgewertet werden konnten. Dieser kostbare Nachlaß ist die eigentliche Ursache für den ungewöhnlichen Aufschwung des Ultraschalles in den letzten Jahren.

Das Wesen der Erfolge des Ultraschalles beruht wohl darin, daß es mit verhältnismäßig geringen Mitteln möglich ist, Intensitäten zu erzeugen, die die eines Kanonenschusses um das 1000- bis 100 000fache übertreffen. Die entsprechenden periodischen Schalldruckschwankungen erreichen so Tausende von Atmosphären. Die im Vergleich zum gewöhnlichen Schall wesentlich kürzere Wellenlänge ermöglicht die Erzeugung

<sup>1</sup> E. Hiedemann: Die Ultraschallforschung. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1939.

<sup>2</sup> L. Bergmann: Der Ultraschall und seine Anwendung in Wissenschaft und Technik. Stuttgart: S. Hirzel Verlag. 1949.



von Schallstrahlen, die beispielsweise zur akustischen Durchstrahlung von Werkstoffen verwertet werden können; gegenüber der Durchleuchtung mit Röntgenstrahlen fällt als wesentlicher Vorteil die geringe Schallabsorption der meisten Materialien ins Gewicht, so daß beträchtliche Materialstärken durchsetzt werden können. Die kurze Ultraschallwellenlänge ermöglichte ferner die Entwicklung einer der gewöhnlichen Optik verwandten Schalloptik, die eine Art „akustischer Abbildung“ gestattet.

Die ersten Arbeiten auf dem Gebiet der Ultraschallmaterialprüfung gehen auf die Jahre 1935 bis 1940 zurück. Namen wie Sokoloff, Mühlhauser, E. Meyer, Buchmann sind mit ihnen verknüpft. Im folgenden sollen aber nur solche Verfahren der Materialprüfung besprochen werden, die sich auch in Zukunft bewähren dürften. Eine kurze Besprechung der Schallsender und Schallempfänger sei vorausgeschickt.

## 2. Die Schallsender<sup>1, 2, 3, 4</sup>.

Als Schallquellen werden heute bei der Materialprüfung fast ausschließlich Quarze verwendet. Wird auf einen Quarz eine elektrische Spannung in Richtung der elektrischen (X)-Achse gelegt, so löst diese auch eine innere mechanische Spannung aus. Dem Hookeschen Gesetz folgend und je nach der Richtung der elektrischen Feldstärke dehnt sich der Quarz aus oder er zieht sich zusammen; infolge seiner großen mechanischen Steife sind die resultierenden Längenänderungen nur gering. Man verwendet daher Quarze fast ausschließlich in ihrer Resonanz, so daß die Schwingungsamplituden im Vergleich zur statischen Auslenkung um einen gewissen Faktor vergrößert werden. In Luft beträgt dieser Faktor, die sogenannte Resonanzüberhöhung des Quarzes, nahezu 30 000, in Wasser wegen der wesentlich stärkeren Abbremsung der Schwingung durch das relativ schallharte Wasser dagegen nur 15. Der Quarz wird folgendermaßen zugerichtet: Man schneidet ihn senkrecht zur elektrischen Achse in Scheiben, deren Dicke  $d$  nach Maßgabe der gewünschten Resonanzfrequenz  $f_0$  aus der Beziehung

$$f_0 d = 0.3 \text{ cm} \cdot \text{MHz}$$

bestimmt werden kann. Die Scheibchen werden in einer passenden Fassung mechanisch gehalten, ihre beiden Oberflächen versilbert und mit der Spannungsquelle leitend verbunden. Als Spannungsquelle dient ein gewöhnlicher Hochfrequenzsender in Verbindung mit einem entsprechenden Spannungstransformator. Da nämlich der Quarz bei Frequenzen unterhalb von etwa 3 MHz ein sehr hochohmiges System darstellt, muß die Spannung meist hinauftransformiert werden. Die elektrische Impedanz eines in seiner Resonanz betriebenen Quarzes kann durch eine Parallelkapazität und einen Wirkwiderstand ausgedrückt werden. Die Parallelkapazität entspricht der Eigenkapazität des Quarzes; sie ist praktisch bedeutungslos, da sie parallel zur meist wesentlich größeren Kapazität des Spannungstransformators liegt. Für den Wirkwiderstand, der bei der Beschallung von Flüssigkeiten oder festen Körpern wegen der geringen inneren Reibung des Quarzes die abgestrahlte Schalleistung charakterisiert, liefert die Theorie<sup>2, 5</sup> bei einseitiger Schallabstrahlung des Quarzes (zweite Endfläche schwingt in Luft):

$$R_s = 83 \varrho c d^2 / S = 7.5 \varrho c / S f_{\text{MHz}}^2$$

$\varrho c$  Wellenwiderstand des angrenzenden Mediums (150 k $\Omega$  für Wasser, etwa 30 M $\Omega$  für Eisen, Messing usw.),

<sup>1</sup> E. Skudrzyk: Der Ultraschall. Elektrotechn. u. Maschinenbau 67, 76 (1950).

<sup>2</sup> Benson Carlin: Ultrasonics. London-New York: Mc Graw-Hill. 1949.

<sup>5</sup> E. Skudrzyk: Der Bau leistungsfähiger Ultraschallsender. Elektrotechn. u. Maschinenbau. Im Erscheinen.



$f_{MHz}$  Frequenz in MHz,  
 $S$  schallabstrahlende Fläche).

Für die Abstrahlung eines akustischen Watts je Flächeneinheit des Quarzes benötigt man daher in Wasser die Spannung<sup>5</sup>:

$$V = 1000/f_{MHz} \text{ Volt.}$$

Für die Abstrahlung eines akustischen Watts je Flächeneinheit in Luft ergibt die entsprechende Rechnung unter Berücksichtigung der inneren Reibung des Quarzes<sup>5</sup>:

$$V = 17.8/f_{MHz} \text{ Volt.}$$

Allerdings ist die Reichweite der Schallwellen in Luft außerordentlich gering. Sie beträgt bei Frequenzen oberhalb 100 kHz wegen der großen Schallabsorption höchstens 1 m. Unter Reichweite versteht man in diesem Fall die Entfernung, in der der Schalldruck auf den  $e$ -ten Teil absinkt.

### 3. Die Schallempfänger.

Als Schallempfänger werden ebenfalls Quarz- oder Seignettesalzkristalle verwendet; der Piezoeffekt ist nämlich umkehrbar. Nur muß man beim Bau des Mikrophons darauf achten, daß sämtliche Teile sorgfältig abgeschirmt sind. Die Abschirmung verursacht dem Anfänger meist Kopfzerbrechen, bereitet aber bei einiger Erfahrung keine Schwierigkeiten. Da die Mikrophone sehr hochohmig sind, werden sie meist mit einem Vorverstärker zusammengebaut, dessen Hauptaufgabe es ist, das Mikrophon an die infolge ihrer Eigenkapazität niederohmige Zuleitung zum Verstärker anzupassen<sup>3</sup>. Ohne Vorverstärker hätte die Eigenkapazität der Zuleitung eine Empfindlichkeitsabnahme 1 : 200 je Meter zur Folge.

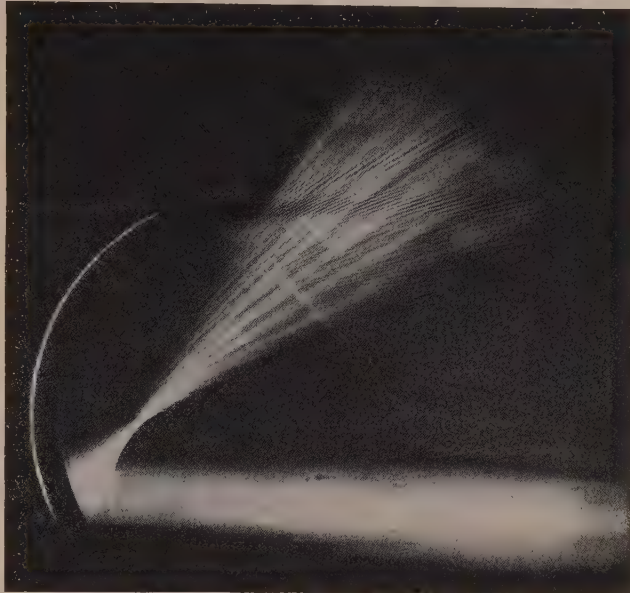


Abb. 1. Optische, sichtbar gemachte Reflexion eines Schallstrahles an einem Hohlspiegel.  
 (Diplomarbeit Hanel, Schwachstrominstitut, Technische Hochschule Wien.)

Neben der punkweisen Abtastung mit Mikrophonen sind auch optische Verfahren zur Sichtbarmachung ganzer Schallfelder gebräuchlich: man beleuchtet das zu untersuchende Schallfeld mit einer punktförmigen Lichtquelle: Infolge der periodischen Dichteschwankungen in der Schallwelle ändert sich auch der Brechungsindex; optisch gesehen ist daher das durchschallte Medium inhomogen. Das einfallende Licht wird ähnlich wie an Tabakrauch gestreut bzw. abgelenkt. Die Schallwelle stellt so eine sekundäre Lichtquelle dar, die mit Hilfe einer Linse auf einem Schirm abgebildet werden kann. Zunächst bleibt freilich das zarte Abbild des Schallfeldes noch unsichtbar, da es von der Intensität des direkten, das heißt des nicht abgelenkten Lichtes verschlungen wird. Das direkte Licht muß daher mit einer kleinen, in den Bildpunkt der Lichtquelle gerückten Scheibe abgedeckt werden. Ersetzt man dann den Schirm durch das Auge, so erscheint das Schallfeld als Aufhellung des sonst dunklen Gesichtsfeldes.

Durch eine solche optische Abbildung werden die feinsten Einzelheiten des Schallfeldes erfaßt; Abb. 1 bringt zwei Beispiele.

Schließlich besteht noch die Möglichkeit, das Schallfeld auf einem akustischen Schirm (Pohlmannschirm) sichtbar zu machen, wie Röntgenstrahlen auf einem Fluoreszenzschirm<sup>1, 2</sup>. Wenn man nämlich eine kleine Scheibe in ein Schallfeld hängt, so stellt sie sich auf Grund der ausgelösten hydrodynamischen Kraft senkrecht zur Schallbewegung ein. Beleuchtet man sie in der Fortschrittsrichtung des Schalles, so reflektiert sie in der senkrechten Lage zurück; in Richtung der Schallwelle betrachtet, erscheint sie daher bei Beschallung beleuchtet, sonst dunkel. Verwendet man mehrere solcher Scheiben, so werden entsprechend mehr Punkte des Schallfeldes wiedergegeben. In der Praxis realisiert man diese Scheibchen durch Aluminiumfitter, das in Xylol suspendiert wird. Die vom Schall getroffenen Teilchen richten sich aus und erscheinen daher von vorne betrachtet beleuchtet, während die übrigen infolge der Wärmebewegung willkürliche und stetig wechselnde Lagen im Raum einnehmen. Die deutsche Marine hoffte, mit Hilfe eines solchen „Pohlmannschirmes“ Minen auf eine Entfernung von 50 m abbilden zu können.

#### 4. Die geometrisch-optischen Verfahren der Materialprüfung.

Bei den geometrisch-optischen Verfahren wird die Materialprobe bestrahlt oder durchstrahlt und das reflektierte oder hindurchgelassene Schallfeld punktweise mit einem Mikrophon, oder als Ganzes, mit Hilfe der optischen Verfahren oder eines Pohlmannschirmes sichtbar gemacht. Für die optischen Verfahren ist Voraussetzung, daß die Fehlstellen einen Schallschatten werfen bzw. zu einer Schallreflexion Anlaß geben. Das ist aber praktisch nur möglich, wenn der Schall den Körper strahlenförmig durchsetzt. Nun existieren aber, wie das Huyghensche Prinzip lehrt, keine idealen Schallstrahlen, denn für jeden Schallstrahl gibt es einen bestimmten Öffnungswinkel, der nicht unterschritten werden kann. In der Theorie der Lochblende wird gezeigt, daß dieser Winkel gegeben ist durch:

$$\sin \Theta = \frac{1.22 \lambda}{D}, \text{ das heißt}$$

$\lambda$  Schallwellenlänge,  $D$  Durchmesser des Schallstrahles.

Er ist also vom Verhältnis des Strahldurchmessers zur Wellenlänge abhängig und ist um so größer, je geringer sein Durchmesser im Vergleich zur Wellenlänge ist. Der Öffnungswinkel eines zehn Wellenlängen breiten Strahles beispielsweise beträgt also mindestens  $7^\circ$  und sein Durchmesser nimmt alle 12 cm um 1 cm zu. Es existiert prinzipiell keine Möglichkeit, dieses Naturgesetz, das auch in der bekannten Heisenbergschen Ungenauigkeit zum Ausdruck kommt, zu umgehen. Daher können auch immer nur solche Fehlstellen abgebildet werden, deren Durchmesser groß im Vergleich zur Wellenlänge ist, ansonsten wird der „geometrisch-optische“ Schallschatten durch die Divergenz der Schallstrahlen, das heißt durch das um die Fehlstelle herumgebeugte Licht vernichtet. Für die geometrisch-akustische Materialprüfung verwendet man heute Frequenzen zwischen 0.5 und 10 MHz; die Wellenlänge liegt dann in festen Körpern zwischen 1 cm und 0.5 mm. Mit der tieferen Frequenz kann man daher je nach der Dicke des durchstrahlten Gegenstandes ein Auflösungsvermögen von einigen Zentimetern bis zu höchstens einem halben Zentimeter, bei der höheren entsprechend von einigen Millimetern bis zu höchstens einem halben Millimeter erzielen.

Die Fehlstellen, die akustisch nachgewiesen werden sollen, bestehen bei Metallen meist aus Luftbläschen (Lunkern), Haarrissen, Ablagerungen von Graphit oder sonstigen Einschlüssen, die in der Regel durch einen vorausgegangenen Zieh- oder Walzprozeß zu geringer Dicke, aber entsprechend großer Ausdehnung flächenhaft



zusammengepreßt worden sind. Weil sie andere akustische Eigenschaften besitzen als das umgebende Material, werfen sie einen Schallschatten, das heißt ein Teil des einfallenden Schalles wird an ihnen reflektiert. Der Reflexionskoeffizient ist, wie in der elementaren Akustik gezeigt wird, gegeben durch

$$R = \frac{\varrho_2 c_2 - \varrho_1 c_1}{\varrho_2 c_2 + \varrho_1 c_1}.$$

$\varrho$ ,  $c$  Dichte und Schallgeschwindigkeit der Störstelle bzw. des sie umgebenden Materials.

Dabei muß allerdings vorausgesetzt werden, daß die Ausdehnung der Fehlstelle senkrecht zur Strahlenrichtung mehrere Wellenlängen beträgt, anderenfalls wird nämlich wesentlich weniger Schall zurückgeworfen. Wenn wir einen Luft-einschluß in Eisen betrachten, so ist

$$\begin{aligned}\varrho_2 c_2 &= 42 \Omega, \varrho_1 c_1 = \\ &= 30\,000\,000 \Omega, \text{ und } R = \\ &= -\left(1 - \frac{4.2}{3 \cdot 10^6}\right).\end{aligned}$$

Bis auf den belanglosen Bruchteil von der Größenordnung eines Millionstels wird also der einfallende Schall an ihm zurückreflektiert; Haarrisse und Lunker wirken mithin als ideale Reflektoren.

Bei der Untersuchung muß dafür gesorgt werden, daß der Schall auch tatsächlich in den Prüfling eindringt. Denn beim Übergang von Luft zu festen Körpern wird, wie eben nachgewiesen, fast die gesamte Energie zurückgeworfen. Man muß daher den Schallsender und das Mikrophon fest aufdrücken, und — um auch die kleinste Luftschicht auszuschalten — die Kontaktfläche mit Öl und Wasser bestreichen. Da der Schallübergang zwischen Flüssigkeiten und festen Körpern wesentlich günstiger ist, kann man aber auch den Prüfling in Wasser oder Öl hängen und Sender und Empfänger an ihm vorbeiziehen.

Im Heinrich-Hertz-Institut in Berlin wurde seinerzeit eine Anlage gebaut (Dr. Schoch) und laufend benützt, die dazu diente, kreisförmige Stahlplatten akustisch zu durchleuchten. Die Platten wurden unter Wasser durch eine mechanische Vorrichtung gedreht. Zugleich wurde der Schallsender und das mit ihm starr verbundene Mikrophon langsam nach außen bewegt. Die Platte konnte so spiralenförmig abgetastet und die Ausgangsspannung des Mikrophons entsprechend registriert werden. Die Frequenz betrug 10 MHz.

Ein verwandtes Verfahren entwickelte die AEG in Berlin (Dr. Götz) für die akustische Durchstrahlung von Panzerplatten: Mikrophon und Sender wurden seitlich vorbeigeschoben, während sich die Platte langsam senkte. Die Registrierung erfolgte hier mit Hilfe eines Tintenschreibers, der durch ein Relay gesteuert wurde. Sobald der hindurchgelassene Schall unter dem festgesetzten Minimum lag, sprach das Relay an und betätigte den Schreiber. Die Frequenz dürfte in diesem Fall ungefähr 1 MHz gewesen sein. Die gleiche Methode verwenden die Brüder Dussik in Ischl für eine akustische Abbildung des menschlichen Gehirns. Die Röntgenstrahlen versagen hier,

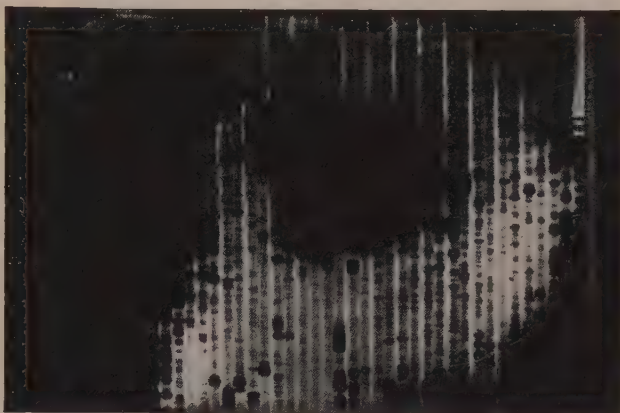


Abb. 2. Akustische Abbildung eines menschlichen Schädels (Diffus erweiterte Ventrikel, Hinterhorn weit nach hinten ausgezogen; nach K. Th. und F. Dussik).



da die Massenunterschiede der einzelnen Gehirnpartien zu gering sind, als daß auf der Röntgenplatte die nötigen Kontraste entstünden. In solchen Fällen pflegte man bisher die Organe mit Kontrastflüssigkeiten zu füllen bzw. dem Gehirn Luft einzublasen. Aber auch dieses Vorgehen befriedigt nicht und ist überdies für den Patienten äußerst schmerzhaft. Die akustische Methode muß daher als Fortschritt bezeichnet werden, zumal sie im Lauf der Zeit noch weiter verbessert werden wird. Abb. 2 zeigt eine solche akustische Hirnaufnahme, in der auch die Andeutungen eines Tumors zu erkennen sind, der nachträglich durch Operation entfernt wurde<sup>6</sup>. Die Durchstrahlungsmethode wurde in letzter Zeit in der Schweiz zur Prüfung von Eisenbahnachsen eingesetzt (Dr. Baud).

Eine belgische Firma hat neuerdings ein Gerät entwickelt, bei dem Schallsender und Schallempfänger auf den Prüfling trocken aufgelegt werden. Die Frequenz des durch die Probe hindurchgelassenen Ultraschalles wird dann in den Hörbereich transponiert und kann so mit einem kleinen Lautsprecher direkt abgehört werden.

### 5. Reflexionsmethoden.

Die Durchstrahlungsverfahren sind sehr störanfällig. Sie werden sich daher wohl nur bei der Prüfung dünner Bleche, wo störende, aus dem Innern der Rohre kommende Reflexe nicht zu befürchten sind, und dort behaupten, wo eine dokumentarische Aufzeichnung des Ergebnisses gewünscht wird. In Zukunft dürften die Reflexionsmethoden bei Ultraschallmaterialprüfungen eine bevorzugte Stellung einnehmen; statt eines kontinuierlichen Schallstrahles verwendet man hier kurze Schallimpulse, die gerichtet ausgesendet werden.

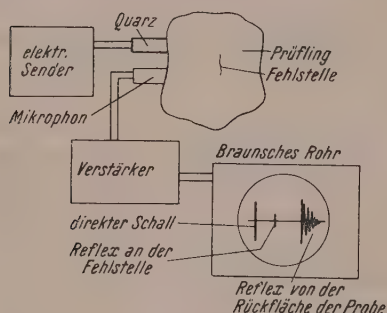


Abb. 3. Prinzipanordnung für die Echomethode der Materialprüfung.

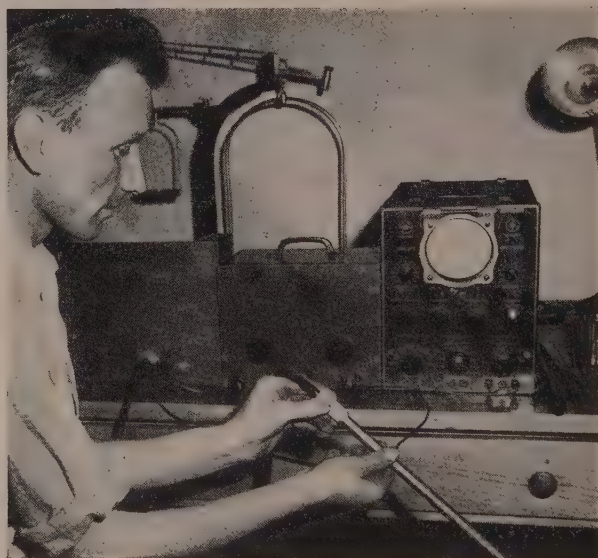


Abb. 4. Schallsender und elektrische Apparatur für die Echoanlage.

Durch die Zeitdauer bis zum Eintreffen des Reflexes und die Richtung des Schallstrahles ist die Lage der Fehlstelle eindeutig festgelegt. Dieses Verfahren hat den weiteren Vorteil, daß auch im Vergleich zur Wellenlänge kleine Fehlstellen, die bekanntlich nur einen geringen Bruchteil des einfallenden Schalles reflektieren, genauestens registriert werden können; man wird zu diesem Zweck nur die Empfindlichkeit des Mikrophons bzw. die Verstärkung entsprechend steigern. Die Methode kann schließlich so weit verfeinert werden, daß auch die Körnigkeit, die eine akustische Trübung des Prüflings darstellt, durch den Streureflex oder durch die Schallabsorption zur Anzeige gebracht wird.

<sup>6</sup> K. Th. Dussik: Ultraschalldiagnostik, insbesondere bei Gehirnerkrankungen, mittels Hyperphonographie. Z. f. physik. Therapie, Bäder- und Klimaheilk. 1, 140 (1948).

Abb. 3 zeigt die Prinzipianordnung: Der Quarzsender hat die Form eines kurzen Bleistiftes; er wird dicht neben dem ähnlich gebauten Empfänger auf die Materialprobe aufgedrückt. Die verstärkte Mikrophonspannung gelangt durch einen Kathodenoszillographen zur Anzeige. Durch periodische Wiederholung des Vorganges (beispielsweise 50mal in der Sekunde) gewinnt man dann ein stehendes Bild am Schirm des Braunschen Rohres. Die Firma Hughes (London) bringt nach diesem System gebaute Apparaturen auf den Markt, bei denen getrennte Schallsender und Schallempfänger Verwendung finden. Abb. 4 zeigt eine photographische Aufnahme eines im Schwachstrominstitut der Techn. Hochschule in Wien im Rahmen einer Diplomarbeit (Manfreda und Meusbürger) entwickelten Gerätes, bei dem der Schallsender gleichzeitig als Schallempfänger dient. Abb. 5 und 6 geben das Schirmbild am Oszillographen wieder, das sich bei der Prüfung dünner Stäbe ergab. Die erste wurde für einen Aluminiumstab (1 m lang, 25 mm  $\varnothing$ ) gewonnen. Wir erkennen zunächst ganz links noch den mitregistrierten, direkt ausgesandten Schallimpuls, wie er über den zu diesem Zeitpunkt noch gesperrten Empfangsverstärker aufgenommen wurde. Dann folgen mehrere kleinere Zacken, die inneren Fehlstellen entsprechen. (Bei völlig einwandfreiem Material, wie es freilich nur selten vorliegt, müßte sich in diesem Bereich eine glatte Nulllinie ergeben.) Schließlich schließt sich das am Stabende reflektierte Hauptreflexband an. Da die Wellen im Stab auch zwischen den seitlichen Begrenzungsflächen zickzackartig hin- und herreflektiert, das heißt, auch nichtaxiale Schwingungen angeregt werden und diese eine kleinere Gruppengeschwindigkeit aufweisen, wird der Hauptreflex in ein ganzes Reflexband aufgespaltet.

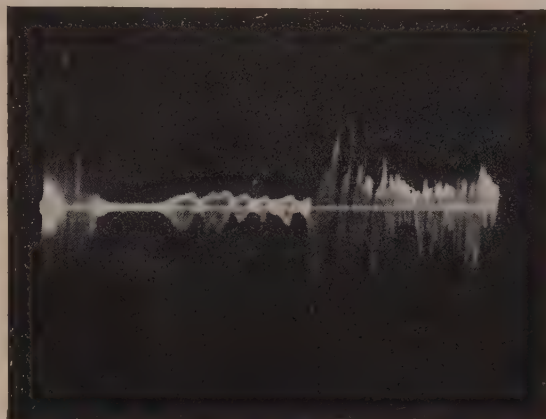


Abb. 5. Reflexbild eines 1 m langen Aluminiumstabes mit kleinen Fehlstellen bei 2 MHz. (Diplomarbeit Manfreda und Meusbürger, Schwachstrominstitut der T. H. Wien.)

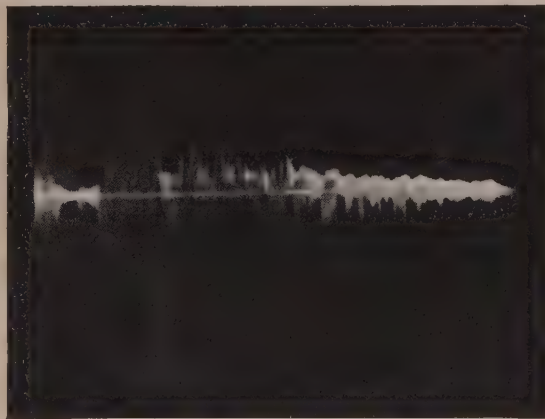


Abb. 6. Reflexbild eines minderwertigen Messingstabes. (Diplomarbeit Manfreda und Meusbürger, Schwachstrominstitut der T. H. Wien.)

Abb. 6 zeigt das für einen Messingstab (1 m lang, 15 mm<sup>2</sup> Querschnitt) gewonnene Reflexbild. Der Stab ist von Fehlstellen derart durchsetzt, daß ein wesentlicher Anteil des Impulses schon zurückreflektiert wird, bevor er noch das Stabende erreicht hat. Es handelt sich hier um körniges, als minderwertig bekanntes Material.

Eine ähnliche, allerdings offenbar wesentlich kompliziertere Apparatur wurde auch von Prof. F. A. Firestone (USA.) entwickelt<sup>4</sup>.

Mit dem Reflexionsverfahren gelingt es ohne weiteres, Stahl- und Eisenblöcke



mehrere Meter tief zu durchdringen. Fehlstellen können so vor der Verarbeitung aufgedeckt, Arbeit und Zeit gespart werden. Auch bei halbfertigen Erzeugnissen, wie Achsen und Rädern, macht sich die Ultraschall-Materialprüfung bezahlt. Besonders wertvoll erweist sich nach amerikanischen Angaben die Prüfung von Flugzeugverstreben. Durch einmaliges Anlegen des Gerätes können sämtliche Fehler in mehrere Meter langen Gestängen aufgedeckt werden. Sogar Flugzeugpropeller sollen zur Überprüfung ihrer inneren Vernietungen mit Erfolg ähnlich untersucht worden sein. Der Ultraschall übertrifft also die Möglichkeiten der Röntgenuntersuchung, ohne jedoch ihr eigentliches Gebiet zu schmälern; durch leicht auszuführende Voruntersuchungen kann nunmehr das Material sondiert und die interessanten Teile einer Röntgenspezialanalyse zugeführt werden.

## 6. Materialuntersuchung auf Grund von Schallgeschwindigkeits- und Schalldämpfungsmessungen<sup>7</sup>.

Die geometrisch-optischen Verfahren dienen im wesentlichen nur der Feststellung von Fehlstellen. Die Aufgaben der Materialprüfung sind aber bedeutend vielseitiger. Nicht nur Fehlstellen, sondern auch die inneren Eigenschaften des Materiales: Elastizität, innere Reibung, inneres Gefüge und chemische Zusammensetzung sollen erfaßt werden. Diese inneren Eigenschaften der Stoffe kommen nun, wie später noch näher erläutert werden wird, in der Schallgeschwindigkeit und in der Schalldämpfung, das heißt der inneren Reibung und ihrem Frequenzgang weitgehend zum Ausdruck. Schallgeschwindigkeits- und Schalldämpfungsmessungen stellen daher ein weiteres mächtiges Hilfsmittel für die akustische Materialprüfung dar.

Für das Verständnis und die korrekte Deutung sind einige prinzipielle Betrachtungen über die innere Reibung erforderlich<sup>7</sup>. Man faßt heute zweckmäßigerweise unter dem Begriff „innere Reibung“ alle jene Vorgänge zusammen, die einen Umsatz von mechanischer Energie in Wärme bedeuten, unabhängig von ihrem inneren Mechanismus. Die Erscheinungen, die bisher als innere Reibung, elastisches Fließen oder Hysterese bezeichnet wurden, sind nichts anderes als unrealisierbare Grenzfälle. In Wirklichkeit haben wir es selbst im einfachsten Fall immer mit einem stetigen Übergang zwischen diesen Grenzfällen zu tun; bei festen Körpern handelt es sich sogar meist um die Überlagerung eines Kontinuums solcher Übergänge, so daß eine detaillierte Deutung überhaupt sinnlos wird. Es bleibt daher kein anderer Ausweg, als den Begriff der inneren Reibung fallenzulassen oder ihn im obigen Sinne zu verallgemeinern. — Man kann nun nachweisen, daß die Verluste bei der periodischen Bewegung durch Komplex-Setzen sämtlicher Elastizitätskonstanten streng berücksichtigt werden können. Da nun aber jeder Körper zwei voneinander unabhängige Elastizitätskonstanten aufweist, wie z. B. einen Schubmodul und einen Kompressionsmodul, so treten entsprechend auch zwei voneinander unabhängige Arten der inneren Reibung auf, z. B. eine Schubreibung oder damit gleichbedeutend eine Zähigkeitsreibung, die durch das Gleiten der Schichten nebeneinander ausgelöst wird, und eine Kompressionsreibung, die mit jeder Kompression oder Dilatation des Mediums verknüpft ist. Die Existenz zweier verschiedener Arten der inneren Reibung hat zur Folge, daß die Dämpfung von der speziellen Form der Schwingung abhängt, also beispielsweise bei Torsionsschwingungen eine andere ist als bei Kompressionsschwingungen und weiters, daß die Dämpfung davon abhängt, in welchem Verhältnis Schub- und Dilatationsbewegung der Schwingung zugrunde liegen. Allerdings weist die innere Reibung bei tiefen Frequenzen häufig eine Besonderheit auf: sie wird unabhängig von der Art der Deformationsbewegung, ist also die gleiche für Schub- und Dilatationsschwingungen. Dieses Verhalten entspricht, wenigstens oberflächlich betrachtet, einer idealen zeitunabhängigen Hysterese, bei der nach jeder Bewegung ein zeitunabhängiger Deformationsrest zurückbleibt. Dieser Deformationsrest ist offenbar auch von der Art der Bewegung unabhängig und steht daher zur vorangegangenen Deformation immer im gleichen prozentuellen Verhältnis. Daraus folgt aber, wie man zeigen kann, daß die innere Reibung, die Dämpfung, von der besonderen Form der Schwingung unabhängig ist. Streng genommen sind allerdings die Verhältnisse häufig wesentlich komplizierter. (Bei Buna z. B. wird dieses hystereseartige Verhalten durch ein besonderes Gesetz der elastischen Nachwirkung vorgetäuscht.) Erst bei höheren Frequenzen machen sich dann die geschwindigkeitsproportionalen Verluste stärker bemerkbar und die Verlustwinkel der

<sup>7</sup> E. Skudrzyk: Die innere Reibung und die Materialverluste fester Körper, I. Österr. Ingenieur-Arch. 2, 356 (1949).



verschiedenen Elastizitätskonstanten, das heißt die verschiedenen Arten der inneren Reibung weichen voneinander ab.

Bei tiefen Frequenzen ist es also im allgemeinen unwesentlich, welches spezielle Resonanzverfahren wir für die Bestimmung der inneren Reibung heranziehen; bei hohen Frequenzen aber muß genau zwischen den verschiedenen Arten der inneren Reibung unterschieden werden. Bei Buna beispielsweise ist bei 10 kHz die Schubreibung etwa 20mal größer als die Kompressionsreibung, obwohl beide bis zu einer Frequenz von etwa 200 Hz innerhalb der Meßgenauigkeit miteinander übereinstimmen.

#### a) Resonanzmethoden.

Bei tiefen Frequenzen, wo die Eigenfrequenzen der Probekörper (Stäbe, Platten usw.) so weit voneinander entfernt liegen, daß sie einzeln angeregt werden können, sind Resonanzmethoden für die Messung der Schallgeschwindigkeit und der inneren Reibung besonders zu empfehlen. Aus der Lage der Eigenfrequenzen kann nämlich die Schwingungssteife, das heißt der die Schwingung bestimmende Elastizitätsmodul, aus der Resonanzschärfe oder Halbwertsbreite der Schwingungen der Verlustwinkel dieser Elastizitätskonstanten oder was damit gleichbedeutend ist, die innere Reibung der Schwingung ermittelt werden.

Eine einfache Anordnung dieser Art wurde im Schwachstrominstitut der Technischen Hochschule zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls und der inneren Reibung von Klangholz entwickelt<sup>8</sup>. Der Probestab wird an zwei Fäden aufgehängt; seine beiden Enden sind mit dünnen Eisenplättchen oder Tauchspulen versehen; das eine dient zur elektromagnetischen bzw. elektrodynamischen Anregung des Stabes, das zweite zur Abnahme der Schwingungen.

Mit Hilfe von Resonanz- und ähnlichen Verfahren wurde während des Krieges im Heinrich-Hertz-Institut in Berlin die innere Reibung von Buna in einem weiten Frequenzbereich untersucht<sup>9</sup>. Für die Messung dienten bei tiefen Frequenzen Torsionsschwingungen, dann ging man zu Dehnschwingungen und schließlich zu Platten-schwingungen über. Daneben fanden auch Rohrmethoden Verwendung, indem die Verschiebung eines Systems stehender Wellen gemessen wurde, wenn das Rohr durch die Bunaprobe abgeschlossen war. Schließlich konnte die Bunaprobe auch in den Druckbauch einer zur Resonanz angeregten Wassersäule gehängt und aus der Verstimmung und der Resonanzschärfe ihre Konstanten errechnet werden.

#### b) Rohrmethoden<sup>10</sup>.

Für Bunaprüfungen wurde ferner im genannten Institut in Gemeinschaftsarbeit ein Impulsverfahren entwickelt, das vom Standpunkt der Materialprüfung Schallgeschwindigkeits- und Schalldämpfungsmessungen gleichkam<sup>10</sup>. Im Verlauf einer längeren Entwicklung hatten sich besonders präparierte Bunafolien als sehr geeignete Absorptionsstoffe gegen akustische Ortung von U-Booten erwiesen. Da es andere als akustische Methoden zur Feststellung getauchter U-Boote nicht gab, war die Entwicklung dieser Folien für die deutsche Marine von entscheidender Bedeutung. Als Maß für die Qualität der Schutzhäute wurde zunächst der „Reflexionskoeffizient“ eingeführt. Die Proben wurden zu Scheibchen geschnitten, in ein mit Wasser gefülltes Meßrohr eingesetzt. Die Messungen konnten bei Drucken bis zu 25 Atü, einer Tauchtiefe von 250 m entsprechend, ausgeführt werden.

<sup>8</sup> Diplomarbeit Ptačnik, Schwachstrominstitut der Technischen Hochschule in Wien.

<sup>9</sup> W. Kuhl in: Die Schallabsorption in Wasser und die Wasserschallschluckstoffe (Dynamik der Kunststoffe). Zusammengestellt und herausgegeben von E. Meyer. In Vorbereitung.

<sup>10</sup> E. Skudrzyk in: Die Schallabsorption in Wasser und die Wasserschallschluckstoffe (Dynamik der Kunststoffe). Zusammengestellt und herausgegeben von E. Meyer. In Vorbereitung.

Der Schallsender befand sich am gegenüberliegenden Rohrende; durch besondere Maßnahmen konnte er auch als Mikrophon verwendet werden. Abb. 7 zeigt eine

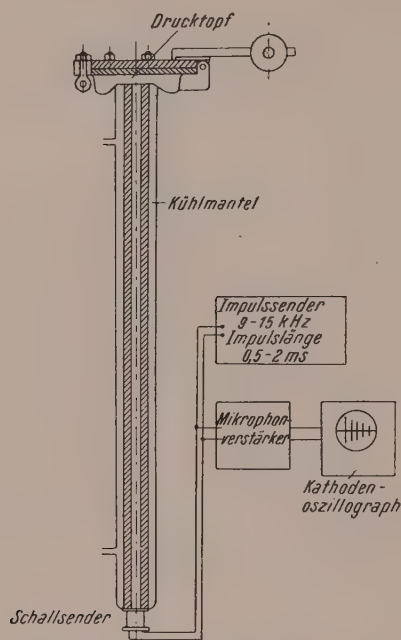


Abb. 7. Schematische Darstellung des Impuls-Meßrohres.

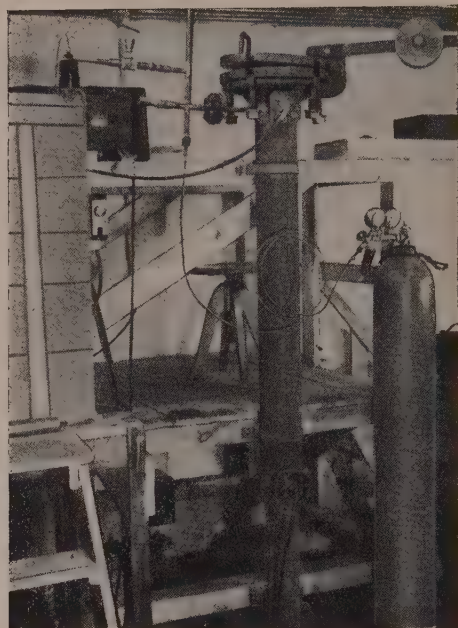


Abb. 8. Photographische Ansicht des Meßrohres.

schematische Darstellung des Meßrohres, Abb. 8 sein photographisches Abbild, Abb. 9 die am Braunschen Rohr wiedergegebene Impulsfolge (direkter Impuls, Reflex von der Probe, mehrfache Reflexionen). In der Folgezeit wurde die Apparatur noch verbessert und für eine Messung der Phase des reflektierten Schalles erweitert. Dadurch konnte sowohl der E-Modul als auch die innere Reibung der Bunaproben bei verschiedenen Frequenzen festgestellt werden.



Abb. 9. Echobild am Schirm des Braunschen Rohres bei verschiedenen Frequenzen.

Anfänglich wurden vier, späterhin zwölf solcher Rohre in Betrieb genommen. Eine Messung dauerte etwa 5 Minuten. Wenn man bedenkt, daß während eines Zeitraumes von vier Jahren täglich von 8 Uhr früh bis 6 Uhr abends Bunaproben gemessen wurden, wird man einsehen, daß wertvolle Ergebnisse zustande kamen. Auf diese Art konnte nebenbei nicht nur die Alterung von Buna genauestens studiert, sondern auch eine Beständigkeit der Bunamischungen erzielt werden, die zuvor von jedem Fachmann als unmöglich abgelehnt worden wäre.

### c) Nachhallverfahren<sup>10</sup>.

Bei hohen Frequenzen sind die bisher geschilderten Methoden unbrauchbar: Rohrmessungen lassen sich nicht mehr durchführen, da neben der gewünschten Schwingung



alle möglichen nichtaxialen Resonanzen angeregt werden, die Resonanzmethoden wieder lassen sich nicht anwenden, da die Eigenschwingungen der Probekörper dann so dicht liegen, daß man sie einzeln nicht mehr anregen kann. Dagegen sind die Nachhall- oder Abklingverfahren besonders geeignet; sie haben den großen Vorteil, daß die Materialprobe nicht besonders präpariert werden muß. Allerdings liefern sie nur die Schalldämpfung. Das ist aber kein Nachteil, denn, wie wir später sehen werden, ist gerade die Dämpfung der Schlüssel zur Materialprüfung. Schallgeschwindigkeit bzw. Elastizitätskonstanten hängen meist nur wenig von der Frequenz ab, so daß ihre Bestimmung bei tiefen Frequenzen durchaus genügt.

Bei den Abklingverfahren schlägt man die Materialprobe an und mißt die Abklingzeit der Schwingung. Das geschieht in der Praxis, indem man einen kleinen Quarz mittels eines Wasser- oder Öltropfens auf die Probe klebt, diesen mit der gewünschten Frequenz anregt und den Sender plötzlich abschaltet. Der Nachhallvorgang wird dann mit einem logarithmischen Verstärker registriert, so daß die Dämpfung ohne weiteres aus der Neigung der im logarithmischen Maßstab als Gerade erscheinenden Abklingkurve abgelesen werden kann.

Nach diesem Verfahren wurde die innere Reibung von Eisen und einigen Aluminiumsorten in einem weiten Frequenzbereich gemessen. Es dürfte sich aber auch im besonderen Maß für die Untersuchung von Klangholz eignen, da die Baumstämme so im Sägewerk direkt durchgemessen werden könnten.

Eine Verfeinerung des Abklingverfahrens wurde vom Verfasser zur Messung der Schalldämpfung in Wasser oder anderen Flüssigkeiten (Benzol) benützt. Das zu untersuchende Wasser wurde in ein nahezu vollkommen verlustfreies Prüfgerät (ein 500 l nahtlos gedrückter Behälter aus einer Aluminiumlegierung, 1 mm Wandstärke) gefüllt und die Abklingzeit in Abhängigkeit von der Wasserhöhe und dem Gefäßdurchmesser bestimmt (Abb. 10). Aus solchen Meßserien ließ sich dann die Schalldämpfung in Wasser bei 100 kHz mit einer Absolutgenauigkeit von 1 db/je km, einer bisher in der Akustik unbekannten Präzision, angeben. Ein Meßfehler würde einem Ablesefehler in der Abnahme des Schalldruckes mit der Entfernung von  $0,1\text{‰}$  je Meter entsprechen. Die Messungen, die zuvor in der Literatur über die Schalldämpfung für diesen Frequenzbereich mitgeteilt wurden, lieferten bis zu 10 000mal zu große Werte. Es ist bemerkenswert, daß die publizierten Fehlmessungen offenbar der Grund waren, warum sich sämtliche Marinen zu Kriegsbeginn auf den Frequenzbereich 0 bis 30 kHz beschränkten. Hätten die Alliierten für die akustische Peilung der U-Boote beispielsweise nur eine um 10 kHz höhere Frequenz gewählt, so wäre die durch die Bunahäute gebildete akustische Tarnung der deutschen U-Boote unwirksam geworden.

#### d) Das Ultraschall-Interferometer<sup>1, 2</sup>.

Die klassische Methode für die Messung der Schallgeschwindigkeit und der Schalldämpfung ist die Verwendung sog. Ultraschall-Interferometer. Eine fortschreitende, ebene Schallwelle wird durch einen Quarz erzeugt und an einem gegenüberliegenden Reflektor  $R$  zu ihm zurückreflektiert. Je nach ihrer relativen Phase, das heißt der

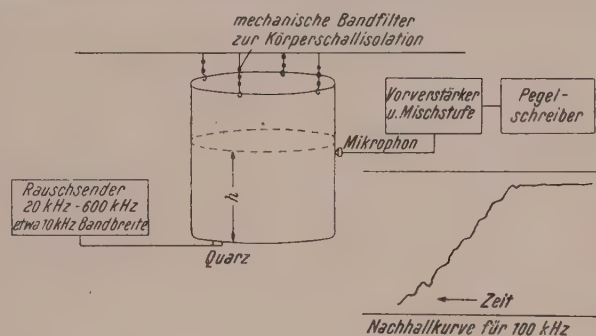


Abb. 10. Schematische Darstellung der Nachhall-Meßapparatur.



Größe des Reflektorabstandes, verstärkt oder schwächt sie das vom Quarz erzeugte Schallfeld. Das Schallfeld könnte an und für sich durch ein Mikrophon gemessen werden, durch das Interferometer aber wird die Schallintensität aus der Rückwirkung des Quarzes auf den Anodenschwingkreis und zwar aus einer Messung des Anodengleichstromes bestimmt. Je größer die Schallintensität, desto stärker ist auch die bremsende Wirkung des Schallfeldes auf den Quarz; der Wirkwiderstand wird dann größer und der Schwingkreisstrom nimmt zu. Infolge der Gleichrichtung durch die gekrümmte Kennlinie des Schwingkreisrohres kommt diese Änderung des Schwingkreisstromes in einer Abnahme des Anodenruhestromes zum Ausdruck: Bei der Messung variiert man den Reflektorabstand und sucht die Stellen maximaler Rückwirkung auf. Ihr Abstand muß natürlich eine Wellenlänge betragen; die Schallgeschwindigkeit ist dadurch eindeutig festgelegt. Die Dämpfung ergibt sich aus der relativen Größe aufeinanderfolgender Maxima.

Interferometermessungen gründen sich auf die Voraussetzung, daß der Quarz ideal ebene Schallwellen abstrahlt, so daß die Divergenz der Öffnungswinkel der Schallstrahlen Null ist. In Wirklichkeit ist das keineswegs der Fall; das Schallfeld ist immer inhomogen. Außerdem tritt infolge der Verluste durch Beugung und infolge der Reibung an den Begrenzungsflächen des Interferometers eine zusätzliche Divergenz auf, die schwer abgeschätzt werden kann. Interferometermessungen sind daher, wenn Schlüsse auf die Schalldämpfung gezogen werden sollen, nur mit größter Vorsicht zu verwerten. Die meisten Veröffentlichungen der Vergangenheit enthalten Meßfehler, die wesentlich größer sind als die vermutlichen Werte der Schallabsorption. Das Interferometerdämpfungsmeßgerät dürfte daher heute wohl abgetan sein.

*e) Schallgeschwindigkeits- und Schalldämpfungsmessungen mit Hilfe der Lichtbeugung<sup>1, 2</sup>.*

Bemerkenswert sind auch die Schallgeschwindigkeits- und Schalldämpfungsmessungen auf Grund der Lichtbeugung an Schallwellen. Reflektiert man ähnlich wie beim Interferometer eine fortschreitende Welle in sich zurück, so entstehen stehende Wellen mit räumlich still liegenden Schwingungsknoten und Schwingungsbäuchen. Mit Hilfe eines der optischen Verfahren kann daher die stehende Welle auf einen Schirm abgebildet und aus dem Abstand der Knotenlinien die Schallgeschwindigkeit ähnlich wie beim Interferometer ermittelt werden. Man kann sogar die Schallwelle als Strichgitter auffassen und durch entsprechende Methoden, wie beim gewöhnlichen optischen Gitter, Spektren verschiedener Ordnungen erzeugen. Die Dämpfung wird aus den Intensitätsverhältnissen bestimmt. Im Prinzip sind die optischen Verfahren der Interferometermessung sehr verwandt; sie liefern nur deshalb einwandfreie Ergebnisse, weil sie im Gegensatz zur Interferometrie meist bei sehr hohen Frequenzen verwendet werden, bei denen eben die Schallabsorption schon so groß ist, daß die Divergenz der Schallstrahlen ihr gegenüber vernachlässigt werden kann. Schließlich kann man auch zwei- und dreidimensionale stehende Wellen erzeugen, indem man mehrere eindimensionale stehende Wellen kreuzt, oder dadurch, daß man das Flüssigkeitsvolumen oder den festen Körper zu Eigenschwingungen anregt. Die Schwingungsbäuche und Schwingungsknoten bilden dann ein akustisches Flächen- oder Raumgitter. Durchschallte Körper führen daher zu ähnlichen optischen Beugungsbildern, wie sie in der Röntgentechnik als Flächengitter oder Raumgitterinterferenzen, sog. „Lauebilder“ bekannt sind.

*f) Ausbreitungsmessungen.*

Die theoretisch einfachste, meßtechnisch aber recht komplizierte Art zur Bestimmung von Schallgeschwindigkeit und Dämpfung besteht in der Messung der Laufzeit

eines kurzen Impulses und seiner Amplitudenabnahme mit der Entfernung. In unbegrenzten Medien (z. B. im Meer) kann unter der Voraussetzung, daß die Meßstrecke genügend lang ist, sogar die Divergenz der Schallstrahlen (das heißt das Ausbreitungsgesetz) experimentell bestimmt werden; man erhält so besonders genaue Werte der Schalldämpfung. Nach einem solchen Verfahren wurde vom Verfasser die Schalldämpfung in der Lübecker Bucht (geringer Salzgehalt) im Frequenzbereich 20 kHz bis 300 kHz experimentell bestimmt<sup>10</sup>. Die Länge der Meßstrecke betrug bis zu 2 km. Bei gutem Schallwetter konnten auf diese Weise die im Laboratorium nach dem Abklingverfahren bestimmten Werte bestätigt werden, während sich bei kräftiger Sonne, Sturm und Regen wesentlich höhere Dämpfungswerte ergaben.

## 7. Ergebnisse.

Bisher haben wir uns auf die Mitteilung der wichtigsten Methoden zur Messung von Schallgeschwindigkeit und Dämpfung beschränkt. Es ist vielleicht nicht uninteressant und für die Beurteilung der Leistungsfähigkeit der akustischen Verfahren von Wert, auf die Meßergebnisse einzugehen.

Abb. 11 veranschaulicht als besonders einfaches Beispiel das Verhalten einer Reihe von Gasen. Die Ordinate zeigt die durch das Quadrat der Frequenz dividierte Schalldämpfung, die der Konstanten der inneren Reibung proportional ist; die Abszisse die Frequenz. Das Meßergebnis ist vom physikalischen Standpunkt äußerst interessant. Es zeigt, daß die Konstante der inneren Reibung bei tiefen Frequenzen tatsächlich konstant ist, daß sie aber bei Frequenzen oberhalb einiger kHz auf nahezu die Hälfte ihres ursprünglichen Wertes sinkt. In diesem Frequenzbereich muß also etwas Außergewöhnliches stattfinden. Geht man dieser Erscheinung nach, so erkennt man als Ursache innere Eigenschwingungen der Moleküle, deren Einschwingzeit gerade von der Größenordnung der Schallperiode dieses kritischen Frequenzbereiches ist. Unterhalb dieser Zone werden die inneren Schwingungen durch die Schallbewegung voll angeregt, während oberhalb die periodischen Schallschwankungen wegen ihrer relativ großen Einschwingzeit keinen Einfluß mehr ausüben können.

In der Gaskinetik wird nun gezeigt, daß sich die innere mechanische Energie der Stoffe nach ganz gestimmten Gesetzen auf sämtliche inneren Schwingungen verteilt, und zwar als Folge der gaskinetischen Zusammenstöße, der inneren Reibung und der

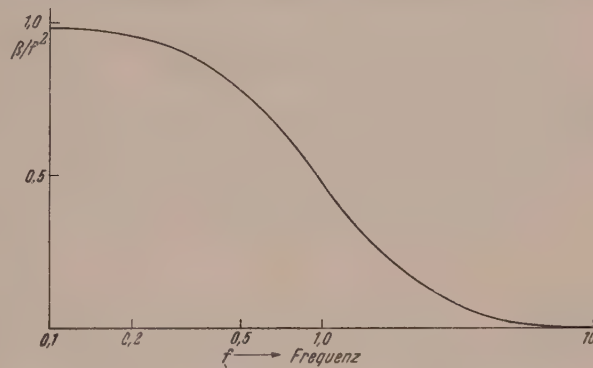


Abb. 11. Grundsätzlicher Verlauf der Konstanten der inneren Reibung bei Gasen.

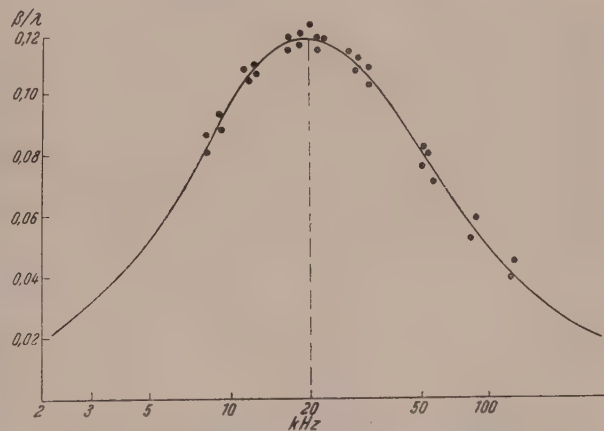


Abb. 12. Auf die Wellenlänge bezogene Schalldämpfung in Kohlendioxydgas (nach Fricke).

sonstigen Kopplungen der Schwingungen untereinander. Wenn wir das Volumen eines Körpers verringern, so leisten wir gegen die dieser Volumenänderung entgegenwirkende Kraft, das heißt den Druck, Arbeit.

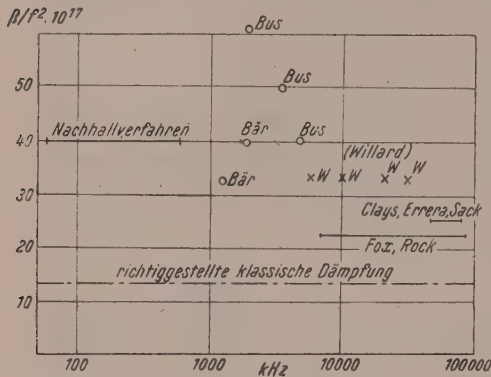


Abb. 13. Die Schalldämpfung in Wasser bei Frequenzen zwischen 20 kHz und 100 MHz.

küle teilt sich aber dann auf die Rotationsschwingungen und schließlich auch auf die inneren Schwingungen der Moleküle auf; der Druck nimmt allmählich ab und

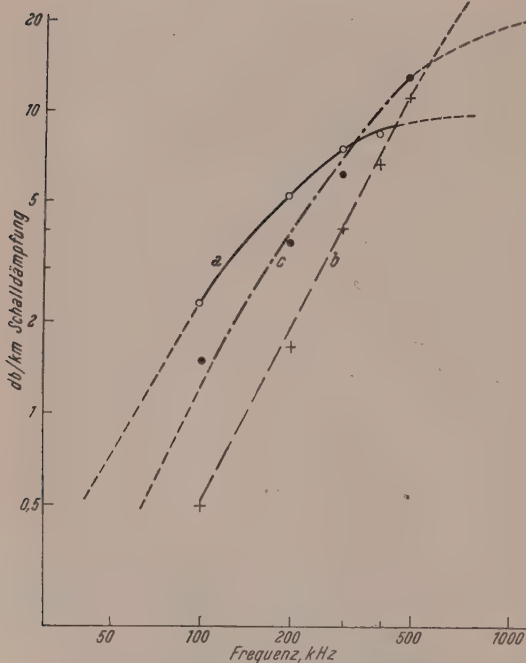


Abb. 14. Die durch kolloidale Kalkteilchen in Wasser bedingte Schalldämpfung.

erreicht erst nach und nach seinen konstanten Endwert. Es handelt sich hier also im Grunde um nichts anderes als einen Spezialfall der elastischen Nachwirkung. Wenn wir Schalldruck und spezifisches Volumen in der Ebene darstellen, so erhalten wir die bekannte Hysteresekurve, deren Fläche die je Schallperiode in Wärme umgesetzte Schwingungsenergie darstellt. Bei tiefen Frequenzen ist die Schallperiode so groß, daß praktisch der gesamte Zyklus der elastischen Nachwirkung durchschritten werden muß. Bei hohen Frequenzen dagegen, wo die Einschwing- oder Relaxationszeit groß im Vergleich zur Schallperiode wird, entfällt der Relaxationsvorgang und damit auch die der ausfallenden Eigenschwingung entsprechende innere Reibung; die innere Reibung nimmt ab. Trägt man die mit der Frequenz multiplizierte Komponente der ausfallenden inneren Reibung auf (innere Reibung minus innere Reibung bei sehr hohen Frequenzen), so erhält man die in Abb. 12 dargestellte Glockenkurve, die hier für Kohlendioxyd bestimmt wurde; die voll ausgezogene

Kurve stellt die theoretisch berechneten Werte dar. Die Frequenz des Maximums der Kurve stimmt bis auf einen Faktor 2 mit dem Kehrwert der Einschwingzeit der ausfallenden inneren Schwingung überein, sein Absolutwert ermöglicht die Bestimmung

der durch kolloidale Kalkteilchen in Wasser bedingte Schalldämpfung.



der mit der ausfallenden inneren Schwingung verknüpften spezifischen Wärme. Beim Kohlendioxyd sind in neueren amerikanischen Arbeiten aber auch noch bei höheren Frequenzen liegende Relaxationsvorgänge, das heißt intramolekulare Eigenschwingungen mit kürzeren Einschwingzeiten, näher untersucht worden.

Abb. 13 bringt Meßergebnisse. Die Meßpunkte bis zu 600 kHz stammen vom Verfasser; sie wurden bei einer Temperatur von etwa 14° C gewonnen; die übrigen, für Temperaturen von etwa 18 bis 20° C, sind anderen Autoren entnommen. Da die Dämpfung in Wasser mit abnehmender Temperatur stark zunimmt, kann in diesem Frequenzbereich die Konstante der inneren Reibung tatsächlich als konstant angesehen werden. Sie ist allerdings um mehr als 50% größer als der inneren Zähigkeit entspräche. Die Ursache ist vermutlich ein Relaxationsvorgang bei noch höheren Frequenzen, der der endlichen Einstelldauer des Dissoziationsgleichgewichtes entspricht.

Ganz ähnliche Resultate erhält man für Schwebeteilchen in Flüssigkeiten<sup>10</sup>: Auch hier ergibt die mit der Frequenz multiplizierte Reibungskonstante eine Glockenkurve. Die Frequenz des Maximums ist durch die Teilchengröße, sein Betrag durch die Teilchenzahl bestimmt. Abb. 14 zeigt die Meßergebnisse (eigene Messungen) für kolloidale Kalkteilchen in Wasser, die nach dem oben

geschilderten Nachhallverfahren mit der extrem hohen Genauigkeit von etwa 0.3 db/km ausgeführt wurden. Sie zeigen, daß die Größe der Teilchen ständig zunimmt, denn das Maximum der Kurve schiebt sich immer mehr nach links, bis es sogar in den Meßbereich fällt. Eine Auswertung der Messungen bezüglich Teilchengröße und Teilchenzahl ermöglichte es, den Härtegrad des Wassers abzuschätzen; die Übereinstimmung des Ergebnisses mit den von den Wasserwerken mitgeteilten Zahlen war verblüffend.

Abb. 15 zeigt die Meßergebnisse für Aluminium und Eisen<sup>10</sup> (eigene Messungen), wobei als Ordinate wieder die mit der Frequenz multiplizierte innere Reibung aufgetragen wurde. Dieser Größe entsprechen nämlich, wie man zeigen kann, die Verluste je Schallperiode. Eine konstante Ordinate bedeutet somit, daß die Verluste je Schallperiode ebenfalls konstant sind, das heißt, daß jene Stoffe, wie z. B. das Aluminium, ein hystereseartiges Verhalten an den Tag legen. Im Falle des Eisens nimmt die Ordinate mit der Frequenz zu; eine Erscheinung, die auf das stark heterogene innere Gefüge des Eisens zurückzuführen ist. Durch die Druckschwankungen werden nämlich in den inneren Kristalliten Wärmeströme hervorgerufen, die zu Relaxationserscheinungen Anlaß geben und die Dämpfung erhöhen. Aus den Messungen kann dank einer Theorie von Zener<sup>11</sup> sogar die Kristallgröße ermittelt werden. Im Falle der Messungen für Eisen war die Übereinstimmung der aus den Ergebnissen berechneten Kristallgrößen mit den aus Schliften bestimmten Größen durchaus befriedigend. Inhomogenitäten des Materials äußern sich besonders augenfällig in der inneren Reibung; namentlich Schweißnähte verursachten eine sehr hohe Dämpfung. Auch Er-

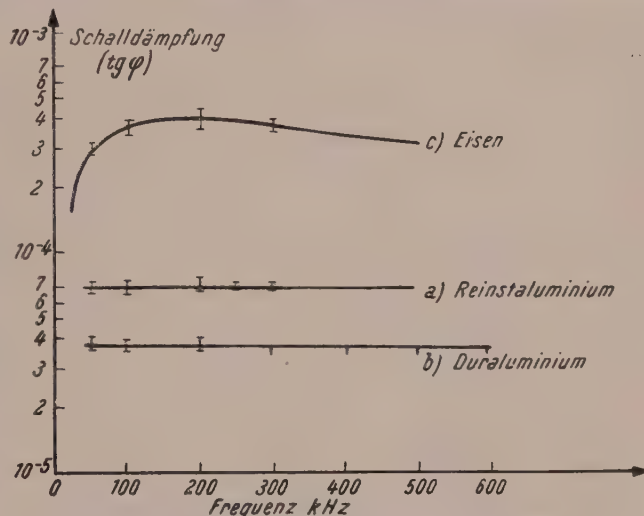


Abb. 15. Die Schalldämpfung in Eisen und Aluminium.

<sup>11</sup> Cl. Zener: Internal friction in solids. *Physic. Rev.* **52**, 230 (1937); **53**, 90 (1938).

müdungs- und Alterungserscheinungen kommen in der inneren Reibung zum Ausdruck. Die für die Wassermessungen benützten Aluminiumbehälter wiesen ausnahmslos ein Jahr nach ihrer Herstellung nahezu die doppelte innere Reibung auf; ob es sich hier um einen natürlichen Alterungsvorgang oder aber um Überbeanspruchung infolge der laufend durchgeführten Ultraschallmessungen handelt, kann allerdings nicht entschieden werden.

Abb. 16 zeigt die Meßergebnisse für Buna S<sup>12</sup>. Hier treten nicht nur einzelne innere Eigenschwingungen, sondern ein ganzes Kontinuum von Relaxationsvorgängen in Erscheinung. Und das ist auch verständlich, denn die komplizierten Knäuelmoleküle wickeln sich bei der Schubbewegung allmählich ab und finden stellenweise langsam, stellenweise sehr rasch in ihre Ruhelage zurück; zu den eigentlichen Eigenschwingungen

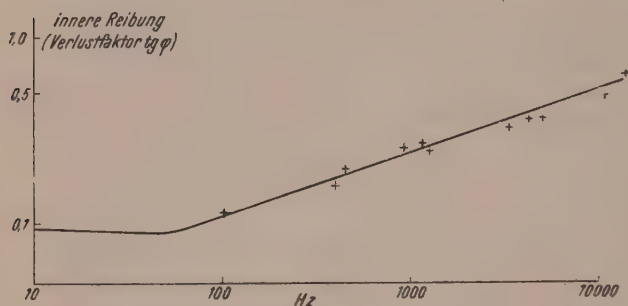


Abb. 16. Die innere Reibung von Buna S (nach E. Meyer, W. Kuhl).

kleinerer Atomgruppen tritt also hier noch ein Kriechen und Fließen der Materie.

Abb. 17 bringt einige Ergebnisse für Klangfichten<sup>8</sup>, die einen ganz ähnlichen Frequenzverlauf aufweisen. Nähere Einzelheiten und die technische Deutung der Messungen werden an anderer Stelle mitgeteilt.

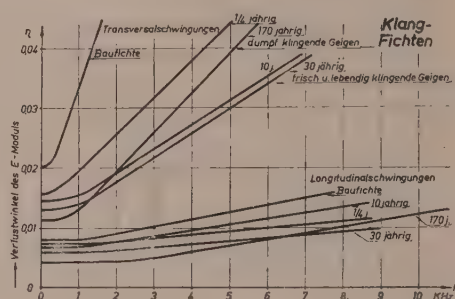


Abb. 17. Die innere Reibung für verschieden alte Klangfichten. (Diplomarbeit Ptacnik, Schwachstrominstitut der T. H. Wien.)

## 8. Zerstörende Materialprüfung mittels Ultraschall.

Bisher waren nur Ultraschallverfahren der zerstörungsfreien Materialprüfung bekannt. Mit den heute zur Verfügung stehenden Ultraschallsendern ist es aber bereits möglich, so starke Intensitäten zu erzeugen, daß die Materialproben zerstört werden, namentlich wenn die Beschallung in Flüssigkeiten vorgenommen wird. Unsichtbare Risse in der Oberfläche des Probestückes können so als Folge der Ultraschallkavitation derart vergrößert werden, daß sie erkennbar sind. Es liegt auf der Hand, Korrosionsfestigkeit und mechanische Festigkeit verschiedenster Proben, beispielsweise von Beton, durch Ultraschall zu überprüfen.

Wir sehen, daß der Ultraschall ein mächtiges Hilfsmittel des Physikers und des Ingenieurs darstellen kann, aber zugleich, daß noch viel Arbeit geleistet werden muß, bis die einzelnen Möglichkeiten der Praxis nutzbar sein werden.

Dem Verfasser ist es eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. E. Meyer, Herrn Dr. Kuhl und seinen früheren Kollegen, in deren Kreis viele der hier beschriebenen Untersuchungen ausgeführt wurden<sup>12</sup>, herzlichst zu danken. Herrn Ministerialrat Dr. Khaum und Herrn Sektionsrat Dr. Svoboda ist der Verfasser für verständnisvolle Unterstützung und Förderung bei der Fortführung der Ultraschallarbeiten nach Kriegsende zu besonderem Dank verpflichtet.

(Eingegangen am 2. August 1949.)

<sup>12</sup> S. die Beiträge von E. Meyer, H. Oberst und K. Tamm in: Die Schallabsorption in Wasser und die Wasserschallschluckstoffe (Dynamik der Kunststoffe). Zusammengestellt und herausgegeben von E. Meyer. In Vorbereitung.



## Buchbesprechungen.

**Einführung in die Funktechnik.** Verstärkung, Empfang, Sendung. Von *F. Benz*. Vierte, stark vermehrte Auflage. Mit 705 Textabb., XX, 736 S. Wien: Springer-Verlag. 1950. S 144.—, geb. S 156.—; sfr. 43.50, geb. sfr. 47.—; \$ 10.—, geb. \$ 10.80; DM 42.—, geb. DM 45.60.

Die vorliegende 4. Auflage hat gegenüber der vorhergehenden eine erhebliche Vergrößerung des Umfangs (um etwa 200 Seiten) erfahren, und zwar vorwiegend dadurch, daß der erste Abschnitt „Allgemeine Grundlagen“ und der fünfte „Sender“ erweitert wurden. Die Einteilung des Stoffes in insgesamt fünf Hauptabschnitte wurde unverändert beibehalten. Aber auch an den Abschnitten zwei (Die Elektronenröhre), drei (Niederfrequenzverstärker) und vier (Empfänger) wurden kleinere Ergänzungen angebracht.

Die Technik der extrem kurzen Wellen, deren eingehendere Behandlung in der Hauptsache zur Vergrößerung des Umfangs geführt hat, ist im wesentlichen in den fünften Abschnitt hineingearbeitet. Allerdings erscheint es dem Leser wenig einleuchtend, die Laufzeitröhren nicht im Abschnitt „Elektronenröhren“ zu finden.

Fragen der Wellenausbreitung werden im Hinblick auf die Hohlleitertechnik eingehender und unter allgemeineren Gesichtspunkten erörtert. Mit der vom Verfasser neuerdings angewandten Bezeichnungsweise, Raumvektoren durch einen über das frakturgeschriebene Symbol gesetzten Punkt von den Zeigern der Wechselstromtechnik zu unterscheiden, wird man sich aus verschiedenen Gründen wohl schwer befreunden können.

Wenn von einer Einführung dieses Umfangs nun schon eine vierte Auflage nötig war, so ist das ein überzeugender Beweis dafür, daß das Buch nicht nur einem Bedürfnis entspricht, sondern dieses auch befriedigt. Das Werk enthält in klarer Darstellung ein großes Material an theoretischen Erörterungen und Formeln in Verbindung mit Zahlenangaben und Schaltskizzen.

Wer sich über das umfassende Gebiet orientieren will, findet in diesem Buch einen ersten Hinweis und einen wertvollen Führer. Da sich der Verfasser bemüht, auch dem mathematisch weniger Geschulten den Zugang zu komplizierteren Zusammenhängen zu erschließen, kann die Einführung einem weiteren Leserkreis bestens empfohlen werden.

*H. König*, Wien.

**Beiträge zur angewandten Mechanik.** Federhofer-Girkmann-Festschrift. Mit 138 Textabb., 413 S. Wien: F. Deuticke. 1950.

Zum 65. Geburtstag Prof. K. Federhofers und zum 60. Geburtstag Prof. K. Girkmanns haben deren Freunde und Schüler eine umfangreiche Festschrift herausgebracht, durch welche die Bedeutung dieser beiden Männer die verdiente Würdigung erfährt.

Das Werk umfaßt Beiträge aus nahezu allen Teilgebieten der technischen Mechanik. Wie schon das eingangs angeführte Namensverzeichnis der Autoren erwarten läßt, ist in der Festschrift wertvollstes Gedankengut niedergelegt, das eine Besprechung im einzelnen verlangen würde. Die große Zahl der Arbeiten und der Umstand, daß sie miteinander in keinem engeren Zusammenhang stehen, sondern jeder Beitrag in sich abgeschlossen ist, zwingen leider wegen der daraus folgenden Breite der Besprechung, von einem solchen Vorhaben abzusehen. Es kann vielmehr nur allen an der technischen Mechanik Interessierten die Lektüre des Werkes wärmstens empfohlen werden.

Zu erwähnen ist noch die gute Ausstattung des Werkes, welches vom Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen nach dem photomechanischen Verfahren in überaus sauberer Weise hergestellt worden ist.

*E. Czitary*, Wien.

**Materialprüfung mit Röntgenstrahlen** unter besonderer Berücksichtigung der Röntgenmetallkunde. Von *R. Glocker*. Dritte, erweiterte Auflage. Mit 349 Textabb., VIII, 440 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1949. Geb. DM 58.—.

Das Erscheinen der dritten Auflage des bekannten Buches von Dr. Richard Glocker, Professor für Röntgentechnik an der Technischen Hochschule Stuttgart: „Materialprüfung mit Röntgenstrahlen unter besonderer Berücksichtigung der Röntgenmetallkunde“ wird von jedem Fachmann mit Freuden begrüßt werden. Der Aufbau der dritten Auflage ist im wesentlichen dem der zweiten Auflage ähnlich und unterscheidet sich wie diese von der ersten Auflage durch eine mögliche Beschränkung auf den durch den Titel des Buches bestimmten Inhalt unter Vermeidung längerer Abhandlungen über die Grundlagen der Röntgenphysik.

Aus diesem Grunde beginnt das Buch mit der Erzeugung der Röntgenstrahlen und der Beschreibung der im Röntgenbetrieb nötigen Röhren, Apparate und Strahlenschutzmittel. Nach einer kurzen Besprechung der Eigenschaften der Röntgenstrahlen wendet sich der Autor der Grobstrukturuntersuchung zu, die im Verhältnis zur zweiten Auflage eine wesentliche Erweiterung erfahren hat. In diesem Abschnitt wird auch die Durchstrahlung mit natürlichen und künst-



lichen  $\gamma$ -Strahlen (Betatron) behandelt; außerdem gelangen die Überlegungen über Fehlererkennbarkeit zur Besprechung. Auch Beispiele für Röntgenaufnahmen mit optischer Nachvergrößerung von normalen und Dünnschliffaufnahmen sowie Wanddickenmessungen mit Hilfe des Zählrohrs werden erläutert. Der Abschnitt über Spektralanalyse hat gegenüber den früheren Auflagen außer einer Kürzung keine nennenswerte Veränderung erfahren. Hingegen ist der Abschnitt über Feinstrukturuntersuchung wesentlich erweitert worden und hat durch eine kurze Darstellung der Atomverteilung in nichtkristallinen Stoffen sehr an Bedeutung gewonnen.

Nach der normalen Einführung in die allgemeinen Grundlagen der Feinstrukturuntersuchung sowie in die kristallographischen Grundlagen und in die Auswertungsmethoden von Debye-Scherrer-, Drehkristall- und Röntgen-Goniometer-Aufnahmen folgen die Intensitätsgesetze der Röntgeninterferenzen und ein Überblick über den Gang einer Strukturbestimmung. Die nächsten Abschnitte beschreiben Kristallstrukturen anorganischer und organischer Stoffe und behandeln die Grundzüge der Kristallchemie. Die Struktur von Legierungen, die Gleichgewichtszustände, Zwischenzustände und Umwandlungsvorgänge, sowie eine Tafel der Struktur der wichtigsten Legierungen werden vom Metallkundler dankbar begrüßt werden.

Die nächsten Abschnitte behandeln die Linienverbreiterung sowie die Messung elastischer Spannungen. Auch die Besprechung der Teilchengrößenbestimmung wird sicherlich von vielen Lesern als sehr zweckmäßig empfunden werden. Es ist jedoch bedauerlich, daß weder bei der Linienverbreiterung noch auch bei der Röntgenspannungsmessung die kritischen Überlegungen anderer Autoren Berücksichtigung fanden. Gerade bei dem großen Interesse, das die Praktiker der Spannungsmessung mit Röntgenstrahlen entgegenbringen, ist es keineswegs angängig, das beschriebene Verfahren, zu dem viele grundsätzliche Einwände zu machen wären, als abgeschlossen und für die Praxis brauchbar hinzustellen. Auch in den folgenden Abschnitten über Kristalltextur fehlen die Arbeiten über Kristallorientierung durch langdauernde Einwirkung gerichteter elastischer Spannungen, offenbar deshalb, weil ihre Ergebnisse dem beschriebenen Verfahren zur Messung elastischer Spannungen abträglich wären.

Der mathematische Anhang ist wie in der zweiten Auflage sehr brauchbar. Die Literatur ist weitgehendst berücksichtigt, weshalb es um so mehr verwunderlich ist, daß aus dieser reichen Zusammenstellung von Büchern und Abhandlungen solche fehlen, die sich mit der Meinung des Autors offenbar nicht decken.

Die hier angeführten Mängel, die bei einer Monographie kaum ins Gewicht fallen würden, machen sich bei einem Lehrbuch wie dem vorliegenden, dem praktisch Handbuchcharakter zukommt, störend bemerkbar.

Das Buch als solches ist, wie schon erwähnt, nach wie vor als Standardwerk der Materialprüfung mit Röntgenstrahlen zu bezeichnen und für jeden, der sich ernstlich mit der Materie befaßt, unentbehrlich.

F. Regler, Wien.

**Festigkeitsnachweis im Stahlbetonbau.** Von K. Jäger. Mit 150 Textabb. und 30 Zahlentafeln, X, 281 S. Wien: Manzsche Verlagsbuchhandlung. 1948. S 74.—, geb. S. 81.—.

Bei der bisher üblichen Berechnungsweise von Stahlbetonkonstruktionen wird der Verbundwirkung von Stahl und Beton dadurch Rechnung getragen, daß für das Verhältnis der Elastizitätsmoduln von Stahl und Beton ein konstantes mittleres Verhältnis „ $n$ “ angenommen wird. Es ist seit langem bekannt, daß Beton dem Hookeschen Geradliniengesetz nicht gehorcht; trotzdem ist wegen der einfachen und für die meisten Fälle ausreichenden Berechnungsweise das „ $n$ -Verfahren“ heute noch herrschend. Allerdings wird in letzter Zeit von verschiedenen Forschern immer dringender darauf hingewiesen, daß das  $n$ -Verfahren unter Zugrundelegung von zulässigen Spannungen nicht der Forderung gleicher Sicherheit bei gleicher Beanspruchungsart entspricht, was in manchen Fällen zu einer Überschätzung des Sicherheitsgrades führen kann.

Die sparsamste Verwendung der Baustoffe erfordert die eindeutige Festlegung des sogenannten Sicherheitsgrades als Verhältnis von Traglast zur Nutzlast der Bauteile. Das Versagen der Bauteile bei Erreichung der Traglast kann je nach Umständen durch Bruch oder durch unzulässig große Formänderungen oder aber durch einen Wechsel der Gleichgewichtslage (Knickung, Beulung, Kippung) erfolgen.

Um dem wahren Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Beton und Stahl besser Rechnung zu tragen und den wirklichen Verformungs- und Festigkeitseigenschaften des Verbundbaustoffes „Stahlbeton“ auch rechnerisch näherzukommen, sind eine Reihe von Vorschlägen und Ansätzen gemacht worden. K. Jäger nimmt Stahl als ideal plastischen Stoff an, der sich bis zur Streckgrenze nach dem Hookeschen Gesetz rein elastisch und dann bei unveränderlicher Spannung bleibend verformt. Die für Beton angenommene „Arbeitslinie“ besteht aus einer Parabel, in deren Scheitel eine zur Dehnungsachse parallele Gerade in der Höhe der Prismenfestigkeit anschließt. Mit Hilfe dieser Annahmen ist es möglich, Konstruktionsteile aller Querschnittsformen für alle Belastungsfälle und beliebige Laststufen zu berechnen.

Es ist ein besonderes Verdienst des Verfassers, auch auf verwickeltere Fragen der Festigkeitslehre des Stahlbetons auf Grund des  $n$ -freien Verfahrens einzugehen. So behandelt er nicht nur die achsrechte und schiefe Biegung verschiedener Querschnittsformen, wie die durch Achskräfte mit Biegemomenten entstehenden zusammengesetzten Beanspruchungen, sondern auch die Stabilität zentrisch oder exzentrisch gedrückter schlanker Stäbe und die Fragen der Schub-, Scher- und Verdrehbeanspruchungen. Der Verfasser leitet die Formänderungsbedingungen im plastischen Zustand ab und berechnet damit und mit Hilfe der Verträglichkeitsbedingungen die Zwangskräfte statisch unbestimmter Systeme.

Da die getroffenen Grundannahmen sich teilweise nur auf Schätzungen nach den Eigenschaften der Beton- und Stahlnorm (B 120, B 160, B 225, B 300; St I, St II, St III, St IV) beziehen, bleibt es noch Aufgabe der Versuchsforschung, die Stoffkennwerte zweckmäßig festzulegen und zu ergänzen.

Es wäre im Sinne einer wirtschaftlicheren Bauweise zu begrüßen, wenn die vorliegende Theorie, die den maßgebenden Festigkeitseigenschaften der Werkstoffe näherkommt als die bisher herrschende, in die Praxis (Ö-Norm) Eingang fände.

A. Leon, Wien.

**Die Erkenntnis und ihre Leistung.** Die naturwissenschaftliche Methode. Von B. Juhos. VI, 262 S. Wien: Springer-Verlag. 1950. S 57.—, sfr. 16.50, \$ 3.80, DM 16.—.

Um den 1922 an die Wiener Universität berufenen Professor für Philosophie der induktiven Wissenschaften Moritz Schlick bildete sich bald ein Kreis von Schülern und philosophisch interessierten namhaften Mathematikern, in welchem eine philosophische Richtung vertreten wurde, die man am besten als „Logistischer Neopositivismus“ oder „Logischer Empirismus“ bezeichnet. Diesem „Wiener Kreis“ gehörte auch der Verfasser an. Bei aller Freiheit der Diskussion und Selbständigkeit des Denkens war allen Teilnehmern eine Grundrichtung gemeinsam: strenge Wissenschaftlichkeit der Philosophie. Daher richtet der neue Logismus das Hauptaugenmerk auf Logik und Mathematik und auf die semantische und syntaktische Analyse der Sprache, während der neue Empirismus insbesondere die Verifikationsgrundlagen der empirischen Aussagen untersucht.

Im Jahre 1934, nach dem tragischen Tode Schlicks, der auch mit Planck, Einstein, Hilbert, v. Mises u. a. persönlichen Verkehr gepflegt hatte, löste sich der Wiener Kreis auf, seine philosophische Richtung wurde aber im Ausland weiter vertreten. In neuester Zeit scheinen die Gedanken des Wiener Kreises durch die Berufung von V. Kraft an die Wiener Universität und durch eine Reihe neu erschienener Bücher auch in Wien neuen Auftrieb zu empfangen, was sehr zu begrüßen ist. In diesem Zusammenhang ist es interessant, daß einer der diesjährigen Nobelpreisträger für Literatur, Russell, der gemeinsam mit Whitehead die neue Logik in einem großen Werk „Principia mathematica“ abschließend behandelt hat, dem Wiener Kreise zumindest sehr nahe steht und dessen Arbeit anerkennend bewertet (Logical Positivism. 1936. Polemic, Vol. I).

Juhos, der sich mit der Frage der „Protokollsätze“ befaßt, die immer eine „Konstatierung“ einschließen, hat die „Konstatierung“ vertreten und weitergeführt. Der von Schlick eingeführte Begriff für eine wie ein analytischer Satz absolut wahre und gewisse Aussage wurde schon seinerzeit im Wiener Kreis kritisch aufgenommen. Eine Nachprüfung der „Konstatierung“ ist logisch nicht möglich, sie ist endgültig und unwiderruflich. Konstatierungen, d. s. empirisch-nicht-hypothetische Sätze, können im Gegensatz zu empirisch-hypothetischen Sätzen niemals als Irrtum bezeichnet werden, sondern nur als Lüge, wenn sie falsch sind. Nach dem Verifikationsverfahren behandelt der Verfasser im letzten Abschnitt philosophische Probleme, u. a. Erkenntnis, Kausalität, Raum und Zeit. Wahrheit und Wirklichkeit, sowie einiges aus der Psychologie, auf deren geringere Beachtung durch den Wiener Kreis Russell hingewiesen hat.

Das Buch ist sehr interessant auch für Leser, die anderer Meinung sind, und — das verdient ausdrücklich hervorgehoben zu werden — so klar und flüssig geschrieben, daß auch Nichtfachleute auf dem Gebiete der Philosophie dem Verfasser mit Verständnis folgen können.

F. Magyar, Wien.

**Einführung in die sphärische Astronomie.** Von A. Prey. Mit 123 Textabb., VII, 316 S. Wien: Springer-Verlag. 1949. S 75.—, geb. S 84.—; sfr. 24.—, geb. sfr. 26.—; \$ 5.50, geb. \$ 6.—; DM 22.—, geb. DM 24.—.

Prof. Prey konnte wenige Tage vor seinem Tode (Weihnachten 1949) noch die Freude erleben, mit den ersten Exemplaren seines endlich erschienenen Lehrbuches der sphärischen Astronomie seine Freunde und Schüler zu beteiligen, nachdem sich der Druck infolge des Krieges und der schwierigen Folgezeit jahrelang verzögert hatte. Das Buch ist nicht nur für den angehenden Astronomen geschrieben, es soll auch dem Kandidaten für das Lehramt in Mathematik und Physik in die Grundlagen dieser Wissenschaft einführen und den Geographen mit den jetzt gebräuchlichen Methoden der Ortsbestimmung vertraut machen. Die vom Autor selbst als not-



wendig bezeichnete Kürze hat aber nirgends die Klarheit der Deduktion beeinträchtigt oder zu einer zu knappen Darstellung eines Teilgebietes dieser Wissenschaft geführt. Auch die notwendigen mathematischen Hilfsmittel, wie Differenzen- und Interpolationsrechnung und die Methode der kleinsten Quadrate, fanden ihren Platz.

Ausgehend von der sphärischen Trigonometrie bringt der erste Abschnitt Koordinatentransformation, Sonnenbahn, Sonnenuhren, Finsternisse und ausführlich Präzession, Nutation, Aberration, Sternkataloge, Parallaxe und Refraktion und behandelt die Bestimmung der Schiefe der Ekliptik und des Frühlingspunktes, sowie die Bestimmung der Nutations- und Aberrationskonstanten.

Hier wie in den folgenden Abschnitten ist der Stoff durch geschickt gewählte, vollständig durchgerechnete Zahlenbeispiele und instruktive Abbildungen wesentlich erleichtert.

Der zweite Teil bringt die Instrumentenkunde und Instrumententheorie. Wieder mit den einfachsten Instrumentenbestandteilen, wie Niveau, Teilkreisen, Fadennetz und Mikrometer, beginnend, widmet der Verfasser dem Sextant, Universaltheodolit, Meridiankreis, Passageninstrument und Äquatorial, ihrer Theorie und Anwendung einen breiten Raum, daneben sind auch das Heliometer und das Prismenastrolabium in den Grundzügen behandelt.

Im dritten Teil des Buches, welcher der geographischen Ortsbestimmung eingeräumt ist, sei neben der Zeit- und Polhöhenbestimmung aus Zeitdistanzen besonders das Zweihöhenproblem und die Längenbestimmung hervorgehoben, welche letztere die Sternbedeckung durch den Mond und die drahtlose Methode umfaßt.

Das Gebotene zeugt von der reichen Erfahrung, die der Verfasser in seiner 46jährigen akademischen Lehrtätigkeit in Innsbruck, Prag und Wien gewonnen hat.

Der bei den mathematischen Werken des Springer-Verlages übliche klare Druck, die verhältnismäßig großen Lettern und die deutlichen Abbildungen erleichtern das Lesen und das Studium des Buches.

K. Mader, Wien.

**Brennstoffe, Kraftstoffe, Schmierstoffe.** Eine Einführung in ihre Chemie und Technologie für Ingenieure. Von B. Riediger. Mit 38 Textabb. und 36 Zahlentafeln, XII, 484 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1949. DM 33.—, geb. DM 38.40.

Ziel des Buches ist die Einführung des Ingenieurs in das gesamte Gebiet der Brenn-, Kraft- und Schmierstoffe, um einerseits das Verständnis für die Vorgänge der Praxis zu fördern, andererseits die Zusammenarbeit zwischen Ingenieur und Chemiker zu fördern.

Demgemäß behandelt der Verfasser in den vier Hauptabschnitten die organische Chemie der in den besprochenen Stoffen vorkommenden Einzelverbindungen, die physikalisch-chemischen Eigenschaften, die Entstehung und Verarbeitung von Kohle und Erdöl (mit Syntheseverfahren), endlich die technisch wichtigsten Eigenschaften.

Die Aufgabe, die sich der Verfasser gestellt hat, ist wegen des umfangreichen Gebietes schwierig. Man kann sagen, daß er sie gut gelöst hat und besonders seiner Feststellung zustimmen, daß die ganze Brennstoffchemie an konventionellen Verfahren noch überreich ist (S. 234), so daß er die physikalisch-chemischen Eigenschaften, vor allem die Frage der Löslichkeit und der kalorischen Größen, sehr ausführlich behandelt, um die grundsätzlichen Zusammenhänge klar herauszustellen. Allerdings kann man bezüglich des richtigen Umfanges der einzelnen Unterabschnitte verschiedener Meinung sein, denn das Schwergewicht liegt nun bei den allgemeinen Zusammenhängen und der Verarbeitung (387 Seiten), so daß für die Besprechung der einzelnen Stoffe selbst nur wenig Raum übrig blieb (80 Seiten). So dürfte die Frage der Mischungswärme (acht Seiten) wohl weniger allgemeines Interesse haben, als z. B. die so außerordentlich wichtige Alterungsneigung von Kraftstoffen (eine Seite) und Schmierölen (zweieinhalb Seiten), die Schmier-eigenschaften der Schmierstoffe (sechs Seiten), das Zündverhalten der Kraftstoffe (drei Seiten) oder das Erstarren der Schmieröle, das kaum besprochen wird. Eine sehr große Zahl neuester Literaturangaben gleicht diesen Nachteil weitgehend aus; hervorzuheben ist das Eingehen auf ethymologische Zusammenhänge bei den Ausdrücken fremdsprachiger Herkunft.

Manche Feststellungen bedürfen einer Revision: so braucht man für die Hydrierung keine schwefelfreien Ausgangsprodukte (S. 178), denn es gibt ja schwefelfeste Katalysatoren, wie S. 371 richtig angedeutet wird, oder braucht man für Höhenflug zur Vermeidung des Vergaservereisens keinen wasserfreien Alkohol, weil — abgesehen von dem geringen Heizwert, der solche Verwendung sowieso ausschaltet — gerade Alkohol zur Vermeidung von Eisbildung Benzin zugegeben wird und das Eis nicht aus dem Alkohol, sondern aus der Luftfeuchtigkeit stammt (S. 151). Das beeinträchtigt den Wert des Buches aber nicht, das sowohl wegen der glücklichen Herausarbeitung allgemeiner Zusammenhänge als der klaren Auseinandersetzung der Bedeutung der chemisch-physikalischen Eigenschaften allen Ingenieuren empfohlen werden kann, die sich über Schmier-, Kraft- und Brennstoffe unterrichten wollen.

A. Philippovich, Wien.



**Elektronenoptik.** Von *A. A. Rusterholz*. Band I: Grundzüge der theoretischen Elektronenoptik. (Lehr- und Handbücher der Ingenieurwissenschaften: Band 15) Mit 118 Textabb., 249 S. Basel: E. Birkhäuser. 1950. sfr. 25.—, geb. sfr. 29.—.

Eine moderne Darstellung der theoretischen Elektronenoptik als Grundlage für die Dimensionierung elektronenoptischer Systeme wird vielen erwünscht sein. Vor allem wäre eine kritische Sichtung der umfangreichen Literatur zur theoretischen Elektronenoptik ein verdienstvolles Unternehmen. *A. A. Rusterholz*, ein Mitarbeiter der Röhrenfabrik der Brown-Boveri A. G., versucht im ersten Band seines Werkes „Elektronenoptik“ dieser Aufgabe gerecht zu werden. In guter übersichtlicher Gliederung bringt die Darstellung die Grundlagen der Berechnung der Elektronenbahnen, die Bestimmung der Kardinalelemente von Elektronenlinsen, die Bildfehlertheorie, die Theorie der zweidimensionalen Felder (Elektronenprismen) und das Wichtigste über den Elektronenspiegel. Das Buch ist flüssig geschrieben und — wie bei einem Verlagshaus vom Namen Birkhäuser nicht anders zu erwarten — gut ausgestattet. Leider aber bestehen gegen die Darstellung auch gewichtige Bedenken, die sie nur mit Vorbehalt empfehlen lassen. Dem Verfasser, der selbst nicht aktiv an der Entwicklung der Elektronenoptik mitgearbeitet hat, ist vielfach nur eine unkritische, rein eklektische Zusammenstellung gelungen, die ihre Ergebnisse oft nur aus zweiter Hand übernimmt. So ist leider auch manch Überholtes und auch Unrichtiges aus der Literatur aufgenommen worden. (Beispielsweise sei bemerkt, daß von den acht auf S. 155 nach Hutter angeführten Abbildungsfeldern mit angeblich Newtonscher Abbildungsgleichung außer dem magnetischen Glockenfeld kein einziges ist, das tatsächlich eine Newtonsche Abbildung besitzt, daß ferner die gleichfalls von Hutter vom magnetischen Glockenfeld auf den analogen elektrischen Fall übertragenen „strenge Durchrechnung einer elektrischen Linse“ unhaltbar ist, da sie die Beschleunigungsspannung nicht, wie es sein muß, additiv, sondern multiplikativ enthält. Das gleiche ist für die auf S. 189 angeführten elektrischen Felder der Fall, usw.) Ganz ungewöhnlich ist die Art des Zitierens, da in der Regel nicht die Originalarbeiten angeführt werden, in denen ein bestimmtes Ergebnis erstmalig erarbeitet worden ist, sondern in willkürlicher Weise spätere Veröffentlichungen, die zumeist über den Inhalt der früheren Arbeiten nicht hinausgehen. Eine derartig sorglose Art, wie hier mit fremdemgeistigen Eigentum geschaltet und gewaltet wird — wie Namen zitiert und nicht zitiert werden —, ist jedenfalls bisher in wissenschaftlichen Werken nicht üblich gewesen.

*W. Glaser, Wien.*

**Grundriß der Flußmorphologie und des Flußbaues.** Von *F. Schaffernak*. Mit 129 Textabb., VII, 115 S. Wien: Springer-Verlag. 1950. S 48.—, sfr. 15.—, \$ 3.50, DM 14.70.

Das Buch enthält im wesentlichen den Inhalt der Vorlesungen über Flußbau, die der Verfasser als Professor der Technischen Hochschule Wien gehalten hat. Der Aufbau und die Darstellung des Werkes sind ausgezeichnet. Überall wird das Grundsätzliche klar herausgestellt und alles Entbehrliche vermieden. Die Abbildungen sind sorgfältig ausgewählt.

Im ersten Teil wird der Leser mit den mannigfaltigen Problemen und Grundlagen des Fluß- und Deichbaues vertraut gemacht (Flußbettgestaltung, Geschiebeführung, Wirkung des Porenwassers, Klärvorgang, wasserbauliche Modellversuche usw.).

Der zweite Teil umfaßt den eigentlichen praktischen Flußbau mit seinen ihm eigentümlichen Baustoffen, Bauweisen, Bauwerken und deren Anwendungen in der Wildbachverbauung, Bach- und Flußregulierung.

Die Reihe der Regulierungsarten könnte noch durch die Stromregulierungen und Kanalisierungen auf die schiffbaren Gewässer ausgedehnt werden. In einer künftigen Auflage könnte ferner der Zusammenhang des Flußbaues mit dem Kraftwasser- und Verkehrswasserbau, mit der Biologie und Landschaftsgestaltung ausführlicher geschildert werden, als dies im derzeitigen Rahmen möglich war. Auch einige neuere charakteristische Ausführungsbeispiele und Hinweise auf das neueste ausländische Schrifttum wären erwünscht.

Mit diesen Anregungen soll jedoch der Wert des Buches nicht im mindesten abgeschwächt werden. Es wird den Studenten der Technischen Hochschulen, aber auch den Bauämtern wertvolle Dienste leisten und ist allen Fachkreisen wärmstens zu empfehlen.

Die Ausstattung des Buches durch den Springer-Verlag ist vorzüglich.

*A. Grzywiński, Wien.*

**Einführung in Wasserbau und Grundbau.** Von *T. Schiffmann*. Mit 533 Textabb., X, 445 S. Wien: Springer-Verlag. 1950. Geb. S 147.—, sfr. 49.60, \$ 11.50, DM 48.—.

Der aus früheren Veröffentlichungen bestens bekannte Verfasser unternimmt es, in einer nur 435 Seiten umfassenden Einführung einen Überblick über das gesamte Gebiet des Wasser- und Grundbaues zu geben.

Im ersten Teil werden Hydraulik, Hydrometrie und andere Grundlagen, im zweiten der praktische Wasserbau (Flußbau, landwirtschaftlicher Wasserbau, Siedlungswasserbau, Kraftwasserbau und Verkehrswasserbau) behandelt.

Da vor allem auf die Verhältnisse in Österreich Bedacht genommen wird, tritt der Verkehrswasserbau gegenüber dem Kraftwasserbau stark zurück. Die Einführung in den Grundbau wird in einem wie ein Anhang anmutenden 6. Abschnitt vermittelt. Es fragt sich, ob nicht die wichtigsten Punkte dieses Abschnittes (Baugrubenumschließung und Wasserhaltung) besser in den zweiten Teil einzugliedern wären und auf die Erörterung des umfangreichen übrigen Gebietes des Grundbaues verzichtet werden sollte. Die Streiflichter zur Geschichte des Wasserbaues sind recht interessant.

Die Abbildungen stammen vielfach aus den bekannten Werken von Schoklitsch, Schaffernak und Strele. So weit es sich um neue Abbildungen und Beispiele handelt, sind sie instruktiv und gut gewählt. Der Verlag hat dem Druck und der Ausstattung des Buches viel Sorgfalt angedeihen lassen.

Das Buch wird als Studienbehelf großen Anklang an Fach- und Hochschulen finden und auch Praktikern, die sich über Nachbarggebiete ihrer Fachrichtung orientieren wollen, gute Dienste leisten.

In einer kommenden Neuauflage wäre es wünschenswert, mehr Literaturhinweise zu geben. Die neueren Gesichtspunkte, wie z. B. die Biologie oder die Landschaftsgestaltung im Wasserbau, sollten mehr berücksichtigt werden. Die Beziehungen der einzelnen Gebiete des Wasserbaues untereinander, wie sie in der wasserbaulichen Gesamtplanung zum Ausdruck kommen, dürfen gerade in einem Werk, das einen Überblick vermitteln will, nicht fehlen.

Mit diesen Bemerkungen soll der Wert des Buches, dessen Erscheinen gewiß begrüßenswert ist, in keiner Weise geschmälert werden.

*A. Grzywiński, Wien.*

**An Introduction to Distribution Methods of Structural Analysis.** Von *R. W. Steed*. Mit 139 Textabb., VII, 116 S. London: Sir Isaac Pitman and Sons, Ltd. 1950. Geb. 12 s. 6 d. net.

Das sogenannte Momentenverteilungsverfahren („Cross-Verfahren“) zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme wurde von Hardy Cross im Jahre 1930 angegeben. Es fand wegen seiner Übersichtlichkeit und Einfachheit rasch Eingang in die Praxis, wurde aber sonderbarer Weise in der europäischen Lehrbuchliteratur sehr stiefmütterlich behandelt. Erst in den letzten Jahren ist hier ein Wandel eingetreten und zu den in fast allen Ländern in großer Zahl erscheinenden Büchern, die sich ausschließlich mit dem Momentenverteilungsverfahren befassen, kommt nun auch dieses englische Büchlein hinzu.

Es ist nach den Worten des Verfassers für den Durchschnittsingenieur und den Studierenden bestimmt und bringt das Verfahren in seiner einfachsten Form an Hand einer großen Zahl ausführlich durchgerechneter Beispiele. Auch verschiebliche Knotenfiguren werden betrachtet. Leider ist die gewählte tabellarische Rechnungsform recht unübersichtlich. Auf die vielen in der Literatur bekanntgewordenen Modifikationen des Verfahrens wird nicht eingegangen.

Das Büchlein ist als erste Einführung recht gut geeignet, kann aber keineswegs zu einer wirklichen Beherrschung des Verfahrens führen, sondern muß durch das Studium der einschlägigen Zeitschriftenliteratur oder vollständigerer Werke ergänzt werden. Das völlige Fehlen jeglicher Literaturhinweise ist deshalb ein besonders schwerwiegender Mangel.

*H. Parkus, Wien.*

**Das Trockengleichrichter-Vielfachmeßgerät.** Von *Th. Walcher*. Mit 97 Textabb., X, 144 S. Wien: Springer-Verlag. 1950. S 45.—, geb. S 54.—; sfr. 13.80, geb. sfr. 16.50; \$ 3.20, geb. \$ 3.80; DM 13.40, geb. DM 16.—.

Der größte Teil des vorliegenden Buches ist der praktischen Verwendung des Normameters für die verschiedensten Meßzwecke gewidmet. Hierbei weist der Verfasser auf viele wichtige Umstände hin, die zwar bekannte Tatsachen der allgemeinen elektrischen Meßkunde darstellen, bietet aber durch die übersichtliche und ausführliche Beschreibung der entsprechenden Methoden eine wertvolle Hilfe für den kritischen Gebrauch eines Gleichrichter-Vielfachmeßgerätes. Etwas bedauerlich erscheint die extreme Spezialisierung auf das Normameter.

*F. Regler, Wien.*



## Autorenverzeichnis.

- Basch, A., Karl Wolf †. (Persönliches.) S. 1.
- Bereis, R., Mechanismen zur Verwirklichung der Joukowski-Abbildung. S. 252.
- Bruniak, R., Über eine Anwendung des Croccoschen Wirbelsatzes. S. 325.
- , Die linearisierte Theorie der dreidimensionalen kompressiblen Unterschallströmung und die experimentelle Untersuchung von Rotationskörpern in einem geschlossenen Windkanal. Von R. van Driest. (Buchbesprechung.) S. 112.
- , Experimental Investigation of a Stationary Cascade of Aerodynamic Profiles. Von W. T. Sawyer. (Buchbesprechung.) S. 112.
- , Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung. Von A. Duschek und A. Hochrainer. II. Teil. (Buchbesprechung.) S. 334.
- Bukovics, E., Eine Verbesserung und Verallgemeinerung des Verfahrens von Blaess zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. S. 338.
- Craemer, H., Die Berechnung von Faltwerken durch Iteration. S. 350.
- Czitary, E., Karl Girkmann 60 Jahre alt. (Persönliches.) S. 113.
- , Ernst Melan zum 60. Geburtstag. (Persönliches.) S. 337.
- , Lehrbuch des Stahlbetonbaues. Von A. Pucher. (Buchbesprechung.) S. 109.
- , Beiträge zur angewandten Mechanik. (Buchbesprechung.) S. 425.
- Drescher, H., Eine experimentelle Bestimmung der aerodynamischen Reaktionen auf einen Flügel mit schwingendem Ruder. S. 270.
- Federhofer, K., Kippsicherheit des kreisförmig gekrümmten Trägers mit einfachsymmetrischem, dünnwandigem und offenem Querschnitte bei gleichmäßiger Radialbelastung. S. 27.
- , Zur graphischen Kinetostatik ebener Getriebe. S. 130.
- Funk, P., An Introduction to the Laplace Transformation. Von J. C. Jaeger. (Buchbesprechung.) S. 109.
- , Lehrbuch der Funktionentheorie. Von H. Hornich. (Buchbesprechung.) S. 335.
- Gauster, W., Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von G. Poppović. (Buchbesprechung.) S. 191.
- Girkmann, K., Berechnung eines Rohrstranges mit Gleitblechlagerung. S. 115.
- Glaser, W., Grundzüge der angewandten Geoelektrik. Von V. Fritsch. (Buchbesprechung.) S. 108.
- , Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik. Von P. Gombás. (Buchbesprechung.) S. 335.
- , Richtungs-Doppelfokussierung von Elektronenbahnen in inhomogenen elektrischmagnetischen Feldern. S. 354.
- , Elektronenoptik. Von A. A. Rusterholz. Band I. (Buchbesprechung.) S. 429.
- Grzywiński, A., Einführung in Wasserbau und Grundbau. Von T. Schiffmann. (Buchbesprechung.) S. 429.
- , Grundriß der Flußmorphologie und des Flußbaues. Von F. Schaffernak. (Buchbesprechung.) S. 429.
- Hanker, R., Die Geschichte der Bauingenieurkunst. Von H. Straub. (Buchbesprechung.) S. 192.
- Heinrich, G., Neue Untersuchungen über den Schlingerfehler bei Einkreisellkompassen. S. 215.
- , Zu L. Föppls Theorie der rollenden Reibung. S. 363.
- Hochrainer, A., Ebene Tensoren und komplexe Zahlen. S. 222.
- Hochrainer, H., Eine Modelltheorie für Regelkreise. S. 376.
- Hofer, R., Trägerbeseitigung und Bandeinengung bei Impulsmodulation. S. 58.
- Kirste, L., Das Ausknicken von Fachwerken aus ihrer Ebene. S. 136.
- Kirste, L. und F. Müller-Magyari, Steifigkeit und Steifigkeitsmethode bei räumlichen Stabwerken. S. 387.
- Kober, C. L., Rückstrahlung von Reflexionskörpern in Wellenfeldern. S. 235.
- König, H., Einführung in die Funktechnik. Von F. Benz. Vierte Auflage. (Buchbesprechung.) S. 425.
- Kozény, J., Der Frost im Baugrund. Von R. Ruckli. (Buchbesprechung.) S. 190.



- Leon, A., The Swelling of Wood under Stress. Von W. W. Barkas. (Buchbesprechung.) S. 110.
- , The Creep of Metals and Alloys. Von E. G. Stanford. (Buchbesprechung.) S. 111.
- , Festigkeitsnachweis im Stahlbetonbau. Von K. Jäger. (Buchbesprechung.) S. 426.
- Mader, K., Einführung in die sphärische Astronomie. Von A. Prey. (Buchbesprechung.) S. 427.
- Magyar, F., Zur Ableitung des Croccoschen Wirbelsatzes. S. 138.
- , Ausgewählte Kapitel aus der Physik. Von K. W. F. Kohrausch. V. Teil. (Buchbesprechung.) S. 189.
- , Die Welt der Vektoren. Von F. Ollendorff. (Buchbesprechung.) S. 190.
- , Einstein und das Universum. Von L. Barnett. (Buchbesprechung.) S. 334.
- , Die Erkenntnis und ihre Leistung. Von B. Juhos. (Buchbesprechung.) S. 427.
- Majer, J., Beitrag zu den dreiachsigen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen fester Stoffe. S. 140.
- , Das reine Randwertproblem des ebenen elastischen Keiles. S. 290.
- Melan, E., Wärmespannungen in Scheiben. S. 153.
- Müller-Magyari, F., s. Kirste, L.
- , Beiträge zur Zugfeldtheorie dünnwandiger Plattenstreifen. S. 12.
- , Ein einfaches Näherungsverfahren zur Bestimmung der Stabilitätsgrenze eines versteiften Plattenstreifens unter Längsdruck. S. 156.
- Oberdorfer, G., Elektrische Maschinen der Kraftbetriebe. Von E. Wist. (Buchbesprechung.) S. 335.
- Parkus, H., Die Grundgleichungen der Schalentheorie in allgemeinen Koordinaten. S. 160.
- , Die überkritische Unterschallströmung. (Bericht.) S. 88.
- , An Introduction to Distribution Methods of Structural Analysis. Von R. W. Steed. (Buchbesprechung.) S. 430.
- Philippovich, A., Brennstoffe, Kraftstoffe, Schmierstoffe. Von B. Riediger. (Buchbesprechung.) S. 428.
- Pröll, A., Ovale Strebenprofile in schiefer Anströmung. S. 73.
- Regler, F., Materialprüfung mit Röntgenstrahlen. Von R. Glocker. Dritte Auflage. (Buchbesprechung.) S. 425.
- , Das Trockengleichrichter-Vielfachmeßgerät. Von Th. Walcher. (Buchbesprechung.) S. 430.
- Reuschel, A., Fahrzeugbewegungen in der Kolonne. S. 193.
- Skudrzyk, E., Die Anwendung des Ultraschalles bei der Materialprüfung. S. 408.
- Slibar, A., s. Vitovec, F.
- , Freie und erzwungene nichtlineare Schwingungen von Mehrmassensystemen. S. 398.
- Tillmann, R., Das Donauwerk Ybbs-Persenbeug. Von A. Grzywiński. (Buchbesprechung.) S. 110.
- Torre, C., Grenzbedingung für spröden Bruch und plastisches Verhalten bildsamer Metalle. S. 174.
- , Die Mechanik der Grenzbeanspruchungen. (Bericht.) S. 93.
- , Praktische Festigkeitslehre. Von K. Jäger. (Buchbesprechung.) S. 109.
- Tschirf, L., Beitrag zur Bestimmung der Axialschubänderung beim Langdrehen. S. 256.
- Vitovec, F. und A. Slibar, Bestimmung der Form der beim Zugversuch sich ausbildenden Einschnürung. S. 75.
- Watzlawek, H., Neuere Probleme des künstlichen Horizontes und der Navigation auf kreiselphysikalischer Grundlage. S. 44.
- Wiesner, R., Energetische Wechselwirkung zwischen dynamischer Elektronenströmung und dynamischem Feld verschiedener Geschwindigkeit. S. 303.
- Wunderlich, W., Höhere Radlinien als Näherungskurven. S. 3.
- Zimmermann, F., Die Auflösung knotenpunktsbelasteter elektrischer Netze mittels Matrizen. S. 243.

Die Übersetzungen der Zusammenfassungen wurden vom Dokumentations-Zentrum der Technik, Wien, durchgeführt.



*Im Herbst 1950 erschienen:*

**Vorlesungen über höhere Mathematik.** Von Prof. Dr. phil. A. Duschek, Wien. In vier Bänden.

**Band II: Unendliche Reihen. Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Abschluß der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung. Lineare Algebra. Tensorfelder.** Mit 125 Textabbildungen. VI, 386 Seiten. Lex.-8°. 1950. S 87.—, DM 26.—, \$ 7.80, sfr. 33.90  
Geb. S 96.—, DM 29.—, \$ 8.70, sfr. 37.80

*Früher erschien:*

**Band I: Integration und Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. Anwendungen. Numerische Methoden. Algebraische Gleichungen. Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Mit 167 Textabbildungen. X, 395 Seiten. Lex.-8°. 1949. S 78.—, DM 26.—, \$ 7.80, sfr. 33.90  
Geb. S 87.—, DM 29.—, \$ 8.70, sfr. 37.80

*In Vorbereitung:*

**Band III: Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Variationsrechnung. Grundzüge der Funktionentheorie.**

**Band IV: Randwertprobleme. Reihenentwicklungen. Integralgleichungen. Laplacetransformation.**

---

**Integraltafel.** Von Prof. Dr. W. Gröbner, Innsbruck, und Prof. Dr. N. Hofreiter, Wien.

**Zweiter Teil: Bestimmte Integrale.** VI, 204 Seiten. 4°. 1950. S 87.—, DM 24.—, \$ 5.80, sfr. 25.—

*Früher erschien:*

**Erster Teil: Unbestimmte Integrale.** VIII, 166 Seiten. 4°. 1949. S 54.—, DM 18.—, \$ 5.40, sfr. 23.50

---

**Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers.** Von Prof. Dr. K. Federhofer, Graz. In drei Teilen.

**I. Teil: Statik.** 165 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 243 Textabbildungen. VI, 130 Seiten. 1950. S 34.—, DM 9.60, \$ 2.30, sfr. 10.—

*In Vorbereitung:*

**II. Teil: Kinematik und Kinetik des Punktes.**

**III. Teil: Kinematik und Kinetik starrer Systeme.**

---

**Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes.** Von Prof. Dr. K. Federhofer, Graz. Mit 35 Textabbildungen und 26 Zahlentafeln. XII, 179 Seiten. 1950.

S 84.—, DM 23.—, \$ 5.50, sfr. 23.50

---

**Diagramme. Einflußlinien und Momente für Durchlaufträger und Rahmen.**

Von Dr. techn. W. Valentin, Wien. Mit 55 Textabbildungen und 64 Tafeln. 67 Seiten. Lex.-8°. 1950. S 72.—, DM 24.—, \$ 5.70, sfr. 24.50

---

**Der Hochbau.** Eine Enzyklopädie der Baustoffe und der Baukonstruktionen. Von S. Mohr, Iselsberg (Osttirol). Zweite, erweiterte Auflage. Mit 307 Textabbildungen. X, 327 Seiten. 1950. Geb. S 84.—, DM 24.—, \$ 5.80, sfr. 25.—

---

Zu beziehen durch jede Buchhandlung



*In den letzten Wochen erschienen:*

**Grundlagen der Architekturtheorie.** Von Dipl.-Ing. K. F. Wieninger, Wien. Mit 64 Textabbildungen. VII, 267 Seiten. Lex.-8°. 1950. S 80.—, DM 20.—, \$ 4.80, sfr. 20.80

---

**Einführung in Wasserbau und Grundbau.** Von Dr.-Ing. T. Schiffmann, Wels. Mit 533 Textabbildungen. X, 445 Seiten. Lex.-8°. 1950.  
In Leinen geb. S 147.—, DM 48.—, \$ 11.50, sfr. 49.50

---

**Die Beurteilung von Schäden an Massivbrücken vom Standpunkte der Betriebssicherheit.** Von Dr.-Ing. R. Kern, Breitenstein am Semmering. Mit 104 Textabbildungen. VI, 94 Seiten. 1950. S 57.—, DM 16.—, \$ 3.80, sfr. 16.50

---

**Stollen- und Tunnelbau.** Eine Einführung in die Praxis des modernen Felshohlbaues. Von Dipl.-Ing. Dr. techn. W. Zanoskar, Salzburg. Mit 74 Textabbildungen. X, 231 Seiten. 1950.  
Geb. S 84.—, DM 24.—, \$ 5.80, sfr. 25.—

---

**Tunnelbaugeologie.** Die geologischen Grundlagen des Stollen- und Tunnelbaues. Von Prof. Ing. Dr. phil. J. Stini, früher Graz. Mit 192 Textabbildungen. XI, 366 Seiten. 1950.  
In Leinen geb. S 127.—, DM 36.90, \$ 8.80, sfr. 38.20

---

**Die Edeltahlerzeugung.** Schmelzen, Gießen, Prüfen. Von Dr. mont., Dr. techn., Dipl.-Ing. F. Leitner, Leoben, und Dr. mont., Dipl.-Ing., Dipl.-Ing. chem. E. Plöckinger, Leoben. Mit 174 Textabbildungen. VIII, 490 Seiten. Lex.-8°. 1950. S 186.—, DM 57.—, \$ 13.60, sfr. 59.—  
Geb. S 198.—, DM 60.—, \$ 14.50, sfr. 62.50

---

**Die Wicklungen elektrischer Maschinen.** Von Dipl.-Ing., Prof. Dr. techn., Dr.-Ing., Dr. phil. H. Sequenz, Wien. In vier Bänden.  
Band I: **Wechselstrom-Ankerwicklungen.** Mit 408 Textabbildungen. XX, 365 Seiten. Lex.-8°. 1950. S 144.—, DM 37.—, \$ 9.—, sfr. 39.—  
Geb. S 156.—, DM 40.—, \$ 9.90, sfr. 42.50

---

*In Vorbereitung:*

Band II: **Stromwender-Wicklungen.** — Band III: **Wechselstrom-Sonderwicklungen.** — Band IV: **Herstellung der Wicklungen.**

---

**Der Werdegang eines Ingenieurs.** Von Dr. E. Rosenberg, Bogotá. VII, 207 Seiten. 1950. S 42.—, DM 10.—, \$ 2.40, sfr. 10.40

---

**Pierre Curie.** Von Madame Curie. Autorisierte deutsche Ausgabe von Anna Kerschagl, Wien. VII, 89 Seiten. 1950. S 18.—, DM 4.20, \$ 1.—, sfr. 4.30

---

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria